

Logik.

Tarski, Alfred: Der Wahrheitsbegriff in den Sprachen der deduktiven Disziplinen. Anz. Akad. Wiss., Wien Nr 2, 23—25 (1932).

Die Hauptgedanken und -ergebnisse einer Abhandlung, die in polnischer Sprache in den Veröffentlichungen der Warschauer Akademie der Wissenschaften erscheinen wird, werden mitgeteilt. Es wird untersucht, in welchen deduktiven Disziplinen die Konstruktion einer methodologisch korrekten Wahrheitsdefinition möglich sei. Angekündigt werden 3 Hauptergebnisse: 1. Auf dem Boden der Umgangssprache ist sowohl eine exakte Definition als eine konsequente Anwendung des Wahrheitsbegriffs unmöglich. — Für die „Kunstsprachen“ formalisierter deduktiver Disziplinen lassen sich die Forderungen, die man an eine einwandfreie Methode der Konstruktion der Wahrheitsdefinition zu stellen hat, derart präzisieren, daß sich ergibt: 2. Für Sprachen der endlichen Stufe (Anzahl der typentheoretischen Stufen beschränkt) gibt es allgemeine Methoden der verlangten Art; 3. die gleiche Annahme für Sprachen der unendlichen Stufe führt (durch einen Gedankengang, der dem Beweis des Gödelschen Satzes, vgl. dies. Zbl. 2, 1, analog ist) zum Widerspruch. — Zum Schlusse wird die Möglichkeit erörtert, die zu einer Disziplin gehörige Wahrheitslehre durch zusätzliche Axiome aufzubauen; die Beziehungen des behandelten Problems zu Erfüllbarkeit und Widerspruchsfreiheit werden angedeutet.

Arnold Schmidt (Göttingen).

● **Russell, Bertrand, und Alfred North Whitehead: Einführung in die mathematische Logik. (Die Einleitung der „Principia Mathematica“.)** Ins Deutsche übertragen v. Hans Mokre. München u. Berlin: Drei Masken Verl. A.-G. 1932. VIII, 168 S. RM. 9.—.

Die deutsche Übersetzung desjenigen Teils der Principia Mathematica, der nicht bloß in Formeln geschrieben ist und der eine Skizze der Gedankengänge des gesamten Werkes gibt, liegt nunmehr vor. Außer dem Vorwort enthält die Übersetzung, der eine ausführliche Inhaltsübersicht vorangestellt ist, die Introduction zur ersten Auflage 1910 und die Introduction of the Second Edition 1925. Über den Inhalt der Principia einen Bericht zu geben, erübrigt sich wohl; es sei lediglich die Rolle der Einleitung zur 2. Auflage ganz kurz zusammengefaßt. Die Typentheorie wird darin modifiziert, indem gemäß einem Vorschlage Wittgensteins der Begriff der Propositionalfunktion eingeschränkt wird; die Unterscheidung von Klassen und logischen Funktionen wird dabei unnötig, und weite Teile von Logik und Mathematik — eine Ausnahme bildet aber z. B. die Dedekindsche Theorie der reellen Zahlen — lassen sich ohne das vielfach angegriffene Reduzibilitätsaxiom begründen. — Der Übersetzer hat sich strikt an seinen Vorsatz, in der Wiedergabe die Strenge der Glätte vorzuziehen, gehalten. Der Umstand, daß besonders der letzte Teil der Einleitung zur 2. Auflage nicht ohne Zuhilfenahme des Gesamtwerks in seinen Einzelheiten wird erfaßt werden können, mindert nicht den Wert einer zuverlässigen Übersetzung der Leitgedanken, deren englische Lektüre wegen der vielen benötigten Termini nicht leicht ist.

Arnold Schmidt (Göttingen).

Chwistek, Leon: Neue Grundlagen der Logik und Mathematik. II. Mitt. Math. Z. 34, 527—534 (1932).

In den Arbeiten „The Theorie of constructive Types“ (Ann. Soc. Polon. Math. Kraców 1923 und 1925) und „Neue Grundlagen der Logik und Mathematik“ (Math. Z. 30, 704) hat der Verf. die Logik und Mathematik so formalisiert daß die inhaltlichen

Überlegungen, die die Zeichen betreffen (den Hilbertschen Ausdruck „Metamathematik“ interpretiert der Verf. etwas anders als Hilbert), überflüssig werden, indem sie in den Formalismus aufgenommen sind; „die Intuition des Lesers wird darauf beschränkt, die Buchstaben und Zeichen voneinander zu unterscheiden und die Angaben über die Zusammenstellung von Zeichen zu verstehen“. Während die erstgenannten Arbeiten vor allem einer strengen Formalisierung der Typentheorie ohne Reduzibilitätsaxiom gewidmet sind, wird der gesamte Formalismus in den „Neuen Grundlagen . . .“ straff durchgearbeitet; mittels eines einzigen „Funktionschemas“ werden alle in Logik und Mathematik vorkommenden Ausdrücke aus bloß zwei Zeichen c und $*$ „mechanisch konstruiert“ („elementare Semantik“), wobei allerdings naturgemäß eine umfangreiche Tafel von Abkürzungen herangezogen wird. (Das Fundamentalschema hat die Form $*EFGHJ$, wo E, F, G, H, J für solche Ausdrücke stehen, die c oder bereits aus c und $*$ mittels des Fundamentalschemas konstruiert sind; es ist je nach dem Auftreten von Ausdrücken, die nicht ein einzelnes c sind, auf acht verschiedene Weisen zu interpretieren.) Außer den im wesentlichen auf die Abkürzungen und das Fundamentalschema bezüglichen „semantischen Regeln“ und „elementaren Verfahrensregeln“ sowie weiteren 35 „semantischen Axiomen“ werden dann nur zwei „logische Verfahrensregeln“ (Modus ponens und Substitution) und ein „eigentliches Axiom“ (spezielle Form des Nicodschen Axioms) benötigt. Dieses „System der Logik und Mathematik“, durch das „das Problem der Mechanisierung der apriorischen Wissenschaften im wesentlichen gelöst“ sei, wird in der Arbeit „Neue Grundlagen . . ., zweite Mitteilung“ modifiziert und vereinfacht. Zunächst wird die Interpretation des Fundamentalschemas in mehrerer Hinsicht verallgemeinert. Der Begriff der „semantischen Ordnung“ wird dabei überflüssig, wodurch die meisten semantischen Axiome entfallen. Weiter wird auf Vorschlag von Hetper die Sonderstellung des Begriffs „elementarer Urteilsausdruck“ beseitigt. Dies läßt erstens von der speziellen Zeichensorte der „elementaren Buchstaben“ absehen; die elementaren Verfahrensregeln und die Tafel der Abkürzungen werden dadurch übersichtlicher; zum andern gelangt man auf diesem Wege zu einer einfachen „semantischen Typenlehre“, welche kurz skizziert wird.

Arnold Schmidt (Göttingen).

Kolmogoroff, A.: Zur Deutung der intuitionistischen Logik. *Math. Z.* **35**, 58–65 (1932).

Der Verf. zeigt, daß die formale intuitionistische Logik sich unabhängig von den intuitionistischen Voraussetzungen als Aufgabenrechnung interpretieren läßt. Bei dieser Auffassung stehen die Veränderlichen für Aufgaben; „beweisbare“ Formeln sind solche, aus denen bei Ersetzung der Veränderlichen durch beliebige Aufgaben gelöste Aufgaben hervorgehen. Diese Interpretation trägt auch zur Klärung der Frage nach der Negationsmöglichkeit einer allgemeinen Aussage bei: diese Negation ist als Aussage betrachtet sinnlos, als Aufgabe aber hat sie einen einfachen Sinn. — Diese Ausführungen geben wohl am klarsten dasjenige wieder, was mit der intuitionistischen Logik ursprünglich gemeint war; ob die letztere als wirkliche Aussagenlogik möglich ist, erscheint noch als fraglich.

A. Heyting (Enschede).

Geschichtliches.

Heegaard, Poul: Überblick über die altägyptische Mathematik. *Norsk mat. Tidsskr.* **13**, 108–118 (1931) [Norwegisch].

Neugebauer, O.: Studien zur Geschichte der antiken Algebra I. *Quell. u. Stud. z. Gesch. d. Math.* **B 2**, 1–27 (1932).

Neugebauer stellt sich die Aufgabe, die antike Algebra in ihren Quellen, Neben- und Ausläufen zu verfolgen und durch Herausgabe bisher unbekannter oder nicht erschöpfend behandelter Texte neu zu begründen. Damit wird eine Zeitspanne umfaßt, die von der ältesten babylonischen und ägyptischen Mathematik über die klassische

und hellenistische Zeit bis zum Ende des 15. Jahrhunderts reicht; erst um diese Jahrhundertwende wird durch die Kossisten, dann durch Cardano, Vieta die moderne Algebra eingeleitet. Andererseits sind aber auch die Nebenverzweigungen in dem indischen und arabischen Kulturkreis zu verfolgen. Zu diesbezüglichen Arbeiten N.s gehört seine Abhandlung „Über die Arithmetik und Rechentechnik der Ägypter (Quell. u. Stud. z. Gesch. d. Math. B 1, 301ff), ferner in demselben Bande die Untersuchungen verschiedener Keilschrifttexte. Gerade diese letzteren geben wichtige Aufschlüsse und reiches Material über die ältesten Quellen. In der vorliegenden Arbeit wird ein weiterer Keilschrifttext behandelt: sie sind unter den bis jetzt bekannten mathematischen Texten die ältesten, stammen aus der Zeit vor Hammurapi (um 2000 v. Chr.), ihr mathematisches Niveau hat aber bereits eine derartige Höhe, daß auf eine lange vorangegangene Vorentwicklung in sumerischer Zeit zu schließen ist. Andererseits stellt N. fest, daß sich dieser mathematisch-wissenschaftliche Stand bis zur Seleukidenzeit anscheinend kaum geändert hat, so daß eine $1\frac{1}{2}$ Jahrtausend lange Erstarrung anzunehmen ist, ganz im Gegensatz zu dem abwechslungsreichen Verlauf in der griechischen Zeit. Allerdings können neue Funde in dieser Annahme wieder etwas ändern; so glaubt N. wenigstens in der äußeren Form schon Differenzierungen erkennen zu können. — Der Inhalt der drei behandelten Aufgaben wird durch die Gleichungen wiedergegeben:

$$\begin{array}{lll} x - y + F = 3,3, & \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + F = 15, & (x - y)(x + y) + F = 1,13,20, \\ x + y = 27, & x + y = 7, & x + y = 1,40. \end{array}$$

Sie sind quadratischer Art und werden zahlenmäßig ausgerechnet, genau wie wir es heute machen. *J. Tropske* (Berlin).

Fotheringham, J. K.: The indebtedness of Greek to Chaldaean astronomy. Quell. u. Stud. z. Gesch. d. Math. B 2, 28—44 (1932).

Die Arbeit ist eine Wiederholung eines 1928 in *The Observatory* 51, Nr 653 erschienenen Aufsatzes. Sie behandelt zwei chaldäische Astronomen, Naburiannu (um 500) und Kidinnu (um 383), deren Leistungen erst durch die Forschungen von Epping, Kugler, Schnabel u. a. erkannt worden sind und ihnen einen Platz neben den größten Astronomen anweisen. Wir nennen: erstaunlich genaue Bestimmungen der mittleren Bewegungen von Sonne und Mond, der Bewegungen der Knoten und Perigee auf Grund jahrhundertelanger ununterbrochener Reihen von Beobachtungen; Tafeln für Sonne, Mond und Planeten, für Sonnen- und Mondfinsternisse mit Angabe der Zeiten und Sichtbarkeitsverhältnisse, womit die Grundlagen für den griechischen Lunisolarkalender gegeben sind; Unterscheidung des tropischen und anomalistischen Jahres (Kidinnu), gleichbedeutend mit der Entdeckung der Präzession; Erkennung der Gleichheit von 251 synodischen mit 269 anomalistischen Monaten (Kidinnu lange vor Ptolemäus). Die Einwirkungen auf die griechische Astronomie lassen sich von der Zeit Alexanders an genauer verfolgen. Das entscheidende Ereignis war die Übersendung einer Sammlung babylonischer Beobachtungen durch Kallisthenes, den Neffen des Aristoteles, um 330. Sie kamen über Kalippus in die Hände von Hipparch, aber während die Chaldäer gleichförmig beschleunigte und verzögerte Bewegungen auf Kreisen voraussetzen, betrachten die griechischen Theoretiker alle himmlischen Bewegungen als gleichförmig. Ihr Ziel war nicht, wie bei jenen, mittlere Bewegungen zu bestimmen, sondern geometrische Erklärungen für scheinbare Ungleichförmigkeiten der Bewegung zu finden. — Anhangsweise werden aus einem Briefwechsel zwischen dem Verf. und einem der Herausgeber einige Ausführungen über das Auftreten der 360-Teilung bei Babyloniern und Griechen wiedergegeben. *P. Epstein* (Frankfurt a. M.).

Vogel, Kurt: Die Näherungswerte des Archimedes für $\sqrt{3}$. Jber. Deutsch. Math.-Verein. 41, 152—158 (1932).

Datta, Bibhutibhusan: Early literary evidence of the use of the zero in India. Amer. Math. Monthly **38**, 566—572 (1931).

In Verbindung mit einer vorangehenden Arbeit des Verf. [Amer. Math. Monthly **33** (1926)] wird dargelegt, daß der Gebrauch einer Null und des Stellenwertes in Indien sogar bis ins 3. vorchristliche Jahrhundert zurückgeht. O. Neugebauer (Göttingen).

Datta, Bibhutibhusan: The origin of Hindu indeterminate analysis. Archeion (Roma) **13**, 401—407 (1931).

Der vorliegende Aufsatz geht den Quellen nach, denen die Probleme der sog. unbestimmten Analysis (Lösung linearer und quadratischer diophantischer Aufgaben) bei den Indern ihre Entstehung verdanken. Es wird an der Hand von Beispielen gezeigt, wie das Problem der Altarkonstruktion von bestimmter Grundfläche (in den einfachsten Fällen aus Quadraten und Rechtecken zusammengesetzt) aus Backsteinen von vorgegebener Anzahl und meistens quadratischer oder rechteckiger Grundfläche notwendig zur Entwicklung einer unbestimmten Analysis führen mußte. Dabei werden die von den Verfassern der Śulbasūtras gegebenen Lösungen in modernerer Formulierung dargestellt. Der Aufsatz ist ein Beitrag zur Erschließung des mathematischen Gehalts der Śulbasūtras nach arithmetischer Seite, dieser für die Geschichte der alten indischen Mathematik wichtigsten Quellen. [Vgl. den Aufsatz des Ref.: Die Mathematik der Śulbasūtras. Abh. math. Semin. Hamburg Univ. **7**, H. 2/3 (1929).]

C. Müller (Hannover).

Datta, Bibhutibhusan: On the relation of Mahāvīra to Śrīdhara. Isis **17**, 25—33 (1932).

In der Abhandlung begründet der Verf. seine Auffassung, daß Mahāvīra in seinem Gaṇita-sāra-saṃgraha (dem ausführlichsten Lehrbuch der Indier über Arithmetik) von Śrīdhara abhängig ist. Zum Vergleich kommt von den Schriften des letzteren für uns nur die allein erhaltene, verhältnismäßig kurze Trīṣatikā in Frage. Der Verf. stützt seine Auffassung auf den Vergleich der von beiden Autoren, und insbesondere nur von ihnen beiden, behandelten Gegenstände aus der Arithmetik, sowie auf den Vergleich der methodischen Behandlung der verschiedenen arithmetischen Rechnungsregeln. Dazu kommt, daß einzelne typische Beispiele zur Illustration der Regeln bei beiden, und zum Teil wieder nur bei ihnen, die gleichen sind, wobei Āryabhaṭa I (499), Brahmagupta (628), Āryabhaṭa II (950), Śrīpati (1039) und Bhāskara-cārya (1114) verglichen werden. An sich wäre eine gemeinsame Quelle beider Autoren nicht ausgeschlossen, aber nach Ansicht des Verf. spricht die Berühmtheit des Namens Śrīdharas auf der einen Seite und die Tatsache, daß Mahāvīra sein Buch ausdrücklich eine „Sammlung“ nennt, auf der anderen Seite für die Abhängigkeit des letzteren von Śrīdhara. Damit ist die zuletzt von G. K. Kaye in seinem Kommentar und Noten zur Trīṣatikā [Bibl. math. (3) **13** (1912/13)] vertretene gegenteilige Auffassung in der Abhängigkeitsfrage nicht haltbar.

C. Müller (Hannover).

Mehta, D. M.: Theory of simple continued fractions. (With special reference to the history of Indian mathematics.) Heidelberg: Diss. 1931. 168 S.

Inhalt: Sektion I (S. 2—25): Kurzer Überblick über die Geschichte der Theorie der Kettenbrüche, wobei ausführlicher der Leistungen der Indier (Āryabhaṭa, Brahmagupta, Bhāskara) gedacht wird, die abendländische Mathematik nur mehr gestreift wird. — Sektion II (S. 26—71): Text und Übersetzung der Abschnitte über die Kuttakarechnung (Method of pulverizer) aus Bhāskaras Bījagaṇita unter Bezugnahme auf H. T. Colebrooke, Algebra with arithmetic and mensuration ... translated, London 1817, nebst Vergleichung mit den Ansätzen der modernen Kettenbruchtheorie. — Sektion III (S. 72—109): Hauptsätze der Theorie der modernen Kettenbrüche, wesentlich unter Bezugnahme auf O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen. — Sektion IV (S. 110—164). Eigene Untersuchungen des Verf. über die von K. S. Sanjana in den London Educational Times gestellten Probleme der Faktorisie-

rung der Zahlen von der Form $N_1^4 + N_2^4$, $N_1^4 \pm N_1^2 N_2^2 + N_2^4$ mit der Hilfe der Theorie der Kettenbrüche. Diese Probleme laufen darauf hinaus, die unbestimmten Gleichungen der Form $P^2 - 2xQ^2 = \pm(x^2 - 1)$, $P^2 - (2x - 1)Q^2 = \pm(x^2 - 1)$ und $P^2 - (2x + 1)Q^2 = \pm(x^2 - 1)$ in rationalen Zahlen P und Q zu lösen, wo x natürliche Zahlen bedeuten, und festzustellen ist, für welche spezielle Form der Zahlen x die Lösungen jeweils möglich sind.

C. Müller (Hannover).

Hayashi, Tsuruichi: On the figurate numbers, recurrent series and the „derivation of differences“ in the old Japanese mathematics. Tôhoku Math. J. 35, 171—226 (1932) [Japanisch].

● **Feldman, W. M.:** Rabbinical mathematics and astronomy. London: M. L. Cailin-gold 1931. XVIII, 232 S. 10/-.

Schub, Pincus: A mathematical text by Mordecai Comtino. (Constantinople, XV century.) Isis 17, 54—70 (1932).

Rabbi Mordecai Comtino lebte in Konstantinopel 1402—1482. Er verfaßte ein hebräisches Buch über Arithmetik und Geometrie, genannt Sefer ha-Heshbon weha-Middot, das handschriftlich existiert. Seine Quellen waren: 1. Für die Arithmetik: Ibn Ezra's Sefer ha-Mispar, der erste hebräische Algorithmus (c. 1160). 2. Für die Geometrie: die griechischen Werke des Heron und die hebräische Geometrie des Abraham Savasorda (c. 1100). Comtino benutzte dasselbe Manuskript der heronischen Geometrie (Codex Constantinopolitanus, 11. Jahrh.), welches Schoene 1896 entdeckt und 1903 veröffentlicht hat. Comtino wußte aber gar nicht, daß er eine heronische Geometrie benütze, sondern glaubte, durch eine falsche Überschrift eines Kopisten irregeleitet, daß es eine euklidische sei. Comtinos Arithmetik ist das erste hebräische Buch, in dem die arabischen Ziffern verwendet werden. Sie werden aber bald linksläufig, bald rechtsläufig geschrieben. Solomon Gandz (New York).

Gennaro, Silvio di: „Essay pour les coniques“ di B. Pascal. Period. Mat., IV. s. 12, 104—112 (1932).

Picard, Émile: Un coup d'œil sur l'histoire des sciences et des théories physiques. Mém. Acad. Sci. Inst. France, II. s. 60, B I—B LII (1931).

Pelseneer, J.: Gilbert, Bacon, Galilées, Képler, Harvey et Descartes: leurs relations. Isis 17, 171—208 (1932).

Sarton, George: Discovery of conical refraction by William Rowan Hamilton and Humphrey Lloyd (1833). Isis 17, 154—161 u. [Faksimile 112—120] (1932).

Geschichtliche Bemerkungen zur Entdeckung der konischen Refraktion in Kristallen durch W. R. Hamilton, ihre experimentelle Bestätigung und Entdeckung der zugehörigen Gesetze der Polarisation durch H. Lloyd; geschichtliche Daten aus dem Leben der beiden Physiker und Reproduktion des entsprechenden Originalaufsatzes von Lloyd.

Herzberger (Jena).

Analysis.

Futagawa, Michiji: On the theory of functions of a quaternary variable. II. Tôhoku Math. J. 35, 69—120 (1932).

This is a continuation of an earlier paper [Tôhoku Math. J. 29, 175—222 (1928)] in which the author introduced functions

$$\omega = \varphi(s) = X(x, y, z, u) + iY(x, y, z, u) + i f Z(x, y, z, u) + f U(x, y, z, u)$$

of a quaternary variable

$$s = x + iy + iz + fu, \quad i^2 = -1, f^2 = 1, f \neq \pm 1,$$

investigated the properties of this variable and introduced the notions of limit, continuity, derivative, and integral, and developed a general introductory theory of these functions in connection with these notions (§§ 1—91). He now continues his investigation. A general theory of series of these functions is developed (§§ 92—99) with appli-

cations to power series and Taylor expansions. The theory of analytical continuation is presented (§§ 100—108). A modular function is treated (§§ 109—110) as an example of an analytical continuation “which can be formed beyond the ‘natural boundary’” and other examples of analytical continuation are given (§§ 111—114).

R. D. Carmichael (Urbana).

Bernstein, Serge: Sur la limitation des valeurs d'un polynôme $P_n(x)$ de degré n sur tout un segment par ses valeurs en $(n+1)$ points du segment. *Izv. Akad. Nauk S.S.S.R., Otdél. mat. i estest. Nauk*, VII. s. Nr 8, 1025—1050 (1931).

$$\text{Let (1) } A_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - a_i) \quad (-1 \leq a_i \leq 1), \quad (2) \quad F(x) = \sum_{i=0}^n \left| \frac{A_{n+1}(x)}{(x - a_i) A'_{n+1}(a_i)} \right|.$$

It is known (Bernstein, Faber) — and is of importance in the theory of interpolation — that $M =$ the smallest possible value of $\max F(x)$ ($-1 \leq x \leq 1$), for all possible ways of choosing the a_i in (1), is of order $\log n$ ($n \rightarrow \infty$), and such order is actually attained by $\max F(x)$, if (3) $A_{n+1}(x) = c \cos(n+1)\theta$ ($x = \cos\theta$; $c = \text{const.}$). In the present paper Bernstein chooses the a_i asymptotically equal (in a suitable manner) to the zeros of (3) and shows (by evaluating asymptotically $A_{n+1}(x)$, $A'_{n+1}(a_i)$) that we thus obtain a class of polynomials $A_{n+1}(x)$, for which all $n+2$ maxima (in $(-1, a_0)$, (a_0, a_1) , \dots , $(a_n, 1)$) are $\sim \frac{2}{\pi} \log n$. Among other results along the same lines we mention the following. 1° It is impossible to choose the a_i in (1) so that the maxima of $F(x)$ in an arbitrarily fixed subinterval of $(-1, 1)$ be $\lesssim \frac{1}{4} \log n$. 2° If $|S_n(\theta)| \equiv \left| \sum_{i=0}^n (A_i \cos i\theta + B_i \sin i\theta) \right|$ (A_i, B_i real or complex) is ≤ 1 at $2n+1$ points θ_i in $(-\pi, \pi)$, then, with any choice of the θ_i , $S_n(\theta)$ may attain asymptotically the value $\frac{2}{\pi} \log n$. It follows 3° If $|P_n(x_i)| \leq 1$ ($P_n(x)$ polynomial of degree n , $-1 \leq x_i \leq 1$, $i = 0, 1, \dots, n$), then, with any choice of the x_i , $P_n(x)$ may attain asymptotically $\frac{2}{\pi} \log n$ (with similar results for $P_{2n}(z)$ in the complex plane, $(-1, 1)$ being replaced by the circumference of the unit-circle). *J. Shohat* (Philadelphia).

Mitra, S. C.: On the properties of a certain polynomial analogous to Lommel's polynomial. *Indian Phys.-Math. J.* 3, 9—13 (1932).

This paper is a study of the properties of a set of polynomials, $R_{n,m}(x)$, which are the coefficients of the following difference equation:

$$D_{m+n}(x) + (-1)^m (n+1) R_{n,m-2}(x) D_n(x) + (-1)^m R_{n-1,m-1}(x) D_{n+1}(x) = 0,$$

where $D_n(x)$, the parabolic cylindrical function, satisfies the difference equation, $D_{n+1}(x) - x D_n(x) + n D_{n-1}(x) = 0$, and is equal to, $D_n(x) = (-1)^n e^{\frac{1}{2}x^2} \frac{d^n}{dx^n} [e^{-\frac{1}{2}x^2}]$.

It is proved that $R_{-2,m}(x) = (-1)^m U_m(x)$, $R_{-3,m}(x) = (-1)^m x U_m(x)$, where $U_m(x)$ is a Hermite polynomial. The positive zeros of $U_m(x)$ and $R_{0,m-2}(x)$ alternate and between any two consecutive positive zeros of $R_{0,m}(x)$ there is only one positive zero of $R_{0,m+1}(x)$. A number of formulas involving the polynomials are derived and $U_{n-s}(x)$ is shown to be a factor of $R_{-2s-2,n+s}(x)$. *H. T. Davis* (Bloomington).

Badescu, Radu: Sur certaines transcendentes uniformes représentées par des séries de fonctions rationnelles. *C. R. Acad. Sci., Paris* 194, 239—242 (1932).

This Note outlines some properties of functions represented by series of the type

(1) $\sum_{m=0}^{\infty} C_m \Phi_m(z)$ (C_m given constants), where the rational functions $\Phi_m(z)$ satisfy an infinite system of recurrence relations

$$P_m(z) \Phi_m(z) = \sum_{n=1}^m Q_{m,n}(z) \Phi_{m-n}(z) + R_m(z) \quad (2)$$

($m = 0, 1, \dots$; $P_m, Q_{m,n}, R_m$ given polynomials in z). The author first investigates the analytic character of the function represented by the auxiliary series — special case of (1) — $\sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m \Phi_m(z)$ (λ complex parameter), under suitable hypothesis concerning $P_m, Q_{m,n}, R_m$ (uniform convergence of all series $\sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m R_m(z), \sum_{m=p+1}^{\infty} \lambda^{m-p-1} Q_{m,m-p}(z), p = 0, 1, \dots$, on a certain circle in the λ -plane, for all z belonging to a certain region, existence of a single limit-function for the sequence $\{P_m(z)\}$, etc.). This enables him to state the meromorphic character of the function represented by the more general series (1), where C_m is replaced by $\lambda^m C'_m$, in a certain specified region in the z -plane.

J. Shohat (Philadelphia).

Stevenson, A. F.: Note on a method of solution of a certain type of homogeneous linear difference equation. (*Dep. of Math., Univ., Toronto.*) Trans. Roy. Soc. Canada III. s. 25, 49—55 (1931).

The main point of this Note is the following. The homogeneous linear difference equation (1) $\sum_{i=0}^p q_i(m) u(m-i) = 0$, with a positive integral variable m (q_i polynomials), may be considered as arising from the differential equation (2) $\sum_{i=0}^n x^{n-i} p_i(x) y^{(n-i)}_{(x)} = 0$ ($p_i(x)$ polynomials, of degree p), assumed to have a solution of the form (3) $y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} u(m) x^{e+m}$ (suitable conditions having been imposed on the $q_i(m)$ and $p_i(x)$). Hence, $u(m)$ — particular solution of (1) — is obtained, whenever the explicit expression of the general term of (3) — integral of (2) — is known. Furthermore, using suitably chosen contour integrals, we can find a solution of (1) for m unrestricted, closely related (and reducible) to that furnished by the Laplace transformation. The above results are illustrated by some examples. *J. Shohat.*

Anghelutza, Th.: Sur une équation fonctionnelle. C. R. Acad. Sci. Paris 194, 420 bis 422 (1932).

A question concerning the mean value of an integral, as formulated by Pompéiu, introduces the functional equation

$$F(y+x)f(y+x) + F(y-x)f(y-x) = F(y)[f(y+x) + f(y-x)].$$

The present author reduces the problem of solving this equation to that of solving an equation analogous to Poisson's functional equation, and determines the solutions.

C. R. Adams (Providence).

Watanabe, Yoshikatsu: Zum Riemannschen Binomischen Lehrsatz. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 14, 22—35 (1932).

Funktionentheoretische Behandlung des Riemannschen binomischen Lehrsatzes.

R. Schmidt (Kiel).

Konečný, Miroslav: Sur la théorie des chaînes de Markoff. Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk Nr 147, 1—16 u. franz. Zusammenfassung 17—18 (1931) [Tschechisch].

Es wird ein einfacher Beweis des Satzes [vgl. Kaucký, Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk Nr 131 (1930)] gegeben: Sei $P = (p_{ik})$ eine r -reihige quadratische Matrix mit $p_{ik} \geq 0$, $\sum_{s=1}^r p_{is} = 1$. Hat die charakteristische Gleichung $|P - Et| = 0$ außer $t_1 = 1$ keine andere Wurzel auf dem Einheitskreise, so existiert $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = Q = (q_{ik})$. Ist außerdem $t_1 = 1$ eine einfache Wurzel der charakteristischen Gleichung, so sind q_{ik} unabhängig von i .

K. Rychlík (Prag).

● **Bromwich, T. J. Ia.:** An introduction to the theory of infinite series. London: Macmillan & Co., Ltd. 1931. 30/-.

● **Carslaw, H. S.:** Introduction to the theory of Fourier's series and integrals. London: Macmillan & Co., Ltd. 1931. 20/-.

Călugăreanu, George: Über einige Reihen mit komplexen Gliedern. *Gaz. mat.* **37**, 163—166 (1931) [Rumänisch].

Verf. beweist in elementarer Weise den Spezialfall ($A_k = 0$, $k = 1, 2, \dots$) seines folgenden in C. R. **191**, 596 (1930) veröffentlichten Satzes: Besitzt das System von Gleichungen $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^k = A_k$, $k = 1, 2, \dots$, mit unendlich vielen Unbekannten x_n , $n = 1, 2, \dots$, eine Lösung mit absolut konvergenter Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, so ist diese eindeutig.

Karamata (Beograd).

Bochner, S.: Limitierung mehrfacher Folgen nach dem Verfahren der arithmetischen Mittel. *Math. Z.* **35**, 122—126 (1932).

Beweis des Permanenzsatzes für das arithmetische Mittel, angewendet auf Doppelfolgen und mehrfache Folgen.

R. Schmidt (Kiel).

Differentialgleichungen:

Vijayaraghavan, T.: Sur la croissance des fonctions définies par les équations différentielles. *C. R. Acad. Sci.*, Paris **194**, 827—829 (1932).

Borel [Mémoire sur les séries divergentes, *Ann. Éc. Norm. sup.* **16**, 1 (1889)] bewies, daß, wenn $f(x)$ für $x > 0$ einer algebraischen Differentialgleichung 1. Ordnung genügt, notwendig $f(x) = o(e^{ax})$ mit $x \rightarrow \infty$ ist. Versuche, für Lösungen von algebraischen Differentialgleichungen 2. Ordnung eine ähnliche Aussage zu erzielen, schlugen fehl. Verf. zeigt nun, daß eine solche Ausdehnung nicht möglich ist: Wenn $\Phi(x)$ eine beliebige wachsende Funktion ist, so gibt es eine Funktion $f(x)$, die einer algebraischen Differentialgleichung 2. Ordnung genügt, und für die $f(x)/\Phi(x)$ nicht gegen Null strebt.

R. Schmidt (Kiel).

Burgatti, P.: Lettera del prof. Terracini al prof. Burgatti. *Boll. Un. Mat. Ital.* **11**, 1—2 (1932).

Terracini proves that when the differential equation

$$(a_1x + a_0)y'' + (x + b_0)y' = ny$$

possesses a polynomial solution $y_n(x)$ with a factor $(x - x_0)^{s+1}$ the linear invariant $a_1b_0 - a_0$, which he denotes by δ , has the value $-sa_1^2$ and so the discriminant of $y_n(x)$ cannot vanish when $\delta > -a_1^2$. When a_1 is kept fixed the polynomial $y_n(x)$ may be associated with a point P whose co-ordinates are a_0, b_0 . As P moves continuously the discriminant of $y_n(x)$ varies continuously and does not vanish unless P crosses one of the lines for which δ/a_1^2 is a negative integer. So long, then, as $\delta > -a_1^2$ the number of real roots of the equation $y_n(x) = 0$ remains the same and since Burgatti has proved that the n roots are all real when $\delta > 0$ it follows that they are all real when $\delta > -a_1^2$.

H. Bateman (Pasadena).

Zervos, Panajiotis: Le problème de Monge. *Mém. Sci. math. H.* **53**, 1—54 (1932).

Das Bändchen enthält einen Überblick der wichtigsten, das Mongesche Problem betreffenden Resultate und Gedankengänge diesbezüglicher Beweise und Theorien. Kap. I. Die Mongesche Methode zur Bestimmung von Integralkurven der Gleichung $f(x, y, z; dy:dx, dz:dx) = 0$. Auflösung der Gleichung $dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = dx_4^2$ mittels der Serretschen und der Darbouxschen Methode und die Verallgemeinerung der letzteren. Integration eines besonderen Gleichungssystems nach H. Hadamard. Transformationen der allgemeinen Mongeschen Gleichung erster Ordnung. Kap. II. Die Theorie des H. Goursat betreffend die Mongesche Gleichung zweiter Ordnung $f(x, y, z; y', z'; y'', z'') = 0$ und diejenige betreffend Systeme von $n - 1$ Mongeschen Gleichungen mit $n + 1$ Veränderlichen. Einige (vom Verf. stammende) Anwendungen der letzteren. Kap. III. Unmöglichkeit der Verallgemeinerung (im gewissen Sinne) der Mongeschen Methode auf allgemeinere Gleichungen erster Ordnung. Der Hilbertsche Beweis der Unmöglichkeit einer expliziten Integration der Gleichung $z' = (y'')^2$. Kap. IV. Die Theorie von E. Cartan: Die fundamentalen Begriffe in der Theorie der Pfaffschen

Gleichungen. Theorie der Systeme von r Pfaffschen Gleichungen mit $r+2$ Veränderlichen, insbesondere der Satz betreffend explizite Integration solcher Systeme. Anwendungen. Kap. V. Beziehungen des Mongeschen Problems zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen. Die Integrationstheorie der partiellen Differentialgleichungen von H. Vessiot und Bemerkungen über ihre Bedeutung für das Mongesche Problem. Kap. VI. Überblick der Resultate des H. Goursat betreffend das Mongesche Problem im Falle mehrerer unabhängig Veränderlichen. *O. Borůvka (Brno).*

Boggio, T.: Sulla superficie d'onda di Fresnel. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 14, 551—556 (1931).

Ableitung der charakteristischen Gleichung für das System der Maxwell'schen elektromagnetischen Gleichungen sowie bekannter Eigenschaften der Fresnel'schen Fläche. (Vgl. hierzu T. Levi-Civita, Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondosa. Bologna: Zanichelli 1931. Vgl. dies. Zbl. 3, 114.) *Rellich.*

Giraud, Georges: Sur certains problèmes non linéaires de Neumann et sur certains problèmes non linéaires mixtes. Bull. int. Acad. Polon. Sci. A Nr 6, 421—437 (1931).

Zunächst wird die Theorie der Randwertaufgaben bei linearen elliptischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung kurz dargestellt, wenn die Koeffizienten nur einer Lipschitzschen Bedingung genügen. Sodann wird die nichtlineare, von einem Parameter t abhängige, elliptische Gleichung

$$\sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha\beta}(u, x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = \Phi\left(\frac{\partial u}{\partial x}, u, x, t\right)$$

behandelt. Die Koeffizienten $a_{\alpha\beta}$ und Φ sollen stetig sein und nach allen Veränderlichen außer t Ableitungen zweiter Ordnung besitzen, die einer Lipschitzschen Bedingung genügen. Für $t = t_0$ soll eine zweimal differenzierbare Lösung u_0 bekannt sein. Dann wird die zweite Randwertaufgabe für t -Werte einer hinreichend kleinen Umgebung von t_0 durch sukzessive Approximationen gelöst, indem man von u_0 ausgeht und die Gleichung durch Differentiation der Koeffizienten linearisiert. Die Methode überträgt sich auf spezielle gemischte Randwertaufgaben. *Willy Feller (Kiel).*

Pfeiffer, G.: Sur la permutation des intégrales d'une équation linéaire et homogène aux dérivées partielles du premier ordre. Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, III. s. 23, 139—181 (1931).

Ist eine partielle Differentialgleichung $Xf = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial f}{\partial X_i} = 0$ vorgelegt, und nach allen unabhängigen inf. Transformationen

$$Yf = \sum_{i=1}^n \eta_i \frac{\partial f}{\partial X_i}$$

gefragt, die $Xf = 0$ gestattet, so handelt es sich bekanntlich darum, alle Yf zu finden, die eine Gleichung der Form

$$XY(f) - YX(f) = \lambda X(f)$$

erfüllen. Diese, bereits von Lie, Cartan, Popovič und A. Buhl behandelte Aufgabe wird hier wieder aufgenommen. Es ergibt sich für Yf ein Operator der Form

$$Yf = \sum_{i=1}^{n-1} \Psi_i J_i(f) + \varrho X(f),$$

worin Ψ_i willkürliche Funktionen der Integrale $\varphi, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}$ von $Xf = 0$ sind, ϱ eine ganz willkürliche Funktion der x bedeutet und $J_i(f)$ „partikuläre Operatoren“ von $Xf = 0$ sind. — Gezeigt wird weiter, daß man den allgemeinsten Ausdruck für Jf , vorausgesetzt, daß $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}$ bekannt sind, ohne weitere Integrationen finden kann. *E. Schuntner (Wien).*

Kryloff, Nicolas, et Nicolas Bogoliuboff: Quelques exemples d'oscillations non linéaires. C. R. Acad. Sci., Paris **194**, 957—960 (1932).

Es werden die quasiperiodischen Lösungen im Sinne von Bohl (Schwebungs-lösungen) der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 J}{dt^2} + \omega^2 J = \varepsilon f\left(\frac{dJ}{dt}\right) + E \sin \alpha t$$

untersucht (ε hinreichend klein). Die Lösungen werden nach Potenzen von ε entwickelt, deren Koeffizienten trigonometrische Reihen von t sind. Es werden allgemeine Formeln zur Berechnung der „Amplituden“ und der gestörten „Eigenfrequenz“ aufgestellt. Der Beweis und die Bedingungen, denen die Funktion f genügen soll, werden in der Mitteilung nicht angegeben. *A. Andronow und A. Witt (Moskau).*

Funktionentheorie:

Broggi, Ugo: Un teorema sulle serie di potenze che rappresentano funzioni razionali. Ist. Lombardo, Rend., II. s. **64**, 238—243 (1931).

Rey Pastor, J., e Ugo Broggi: Su due punti della teoria analitica delle funzioni razionali. Ist. Lombardo, Rend., II. s. **64**, 1293—1298 (1931).

Die in diesen beiden Noten bewiesenen Sätze über das Verhalten der Quotienten a_{n+1}/a_n , wenn die Potenzreihe $\sum a_n z^n$ eine rationale (bzw. meromorphe) Funktion darstellt, sind spezielle Fälle bekannter Sätze; vgl. z. B. die Arbeit von Jungen (dies. Zbl. **3**, 119). *Otto Szász (Frankfurt a. M.).*

Walsh, J. L.: An expansion of meromorphic functions. (*Dep. of Math., Harvard Univ., Cambridge [U.S.A.]*) Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **18**, 165—171 (1932).

Es wird die Darstellung meromorpher Funktionen durch Reihen von der Form

$$a_0 + a_1 \frac{x - \beta_1}{x - \alpha_1} + a_2 \frac{(x - \beta_1)(x - \beta_2)}{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)} + \dots$$

untersucht; die Punktfolge α_n enthalte jede Polstelle der meromorphen Funktion mindestens so oft als die Vielfachheit beträgt; an den Stellen β_n werde interpoliert; sind sie nicht alle verschieden, so sind die Werte der Ableitungen in passender Weise zu berücksichtigen. Die Interpolationsstellen β_n werden als verschieden von allen α_n und innerhalb eines festen Kreises angenommen. Abschnitte dieser Reihe ergeben dann bei spezieller Wahl der β_n rationale Funktionen bester Approximation bzw. höchster Berührungsordnung zur gegebenen Funktion. Diese Ergebnisse können auf den Fall erweitert werden, wo die Funktion $f(x)$ nur für $|x| < R$ meromorph ist, indes sich die Folge α_n in keinem Punkte $|x| < A$, die Folge β_n in keinem Punkte $|x| > B$ ($B < A$) häuft. Die Darstellung konvergiert dann für jedes

$$|x| < (AR - BR - 2AB)/(A - B + 2R),$$

und zwar gleichmäßig für jeden abgeschlossenen Teilbereich dieses Kreises, der keinen Punkt α_n enthält. *Ullrich (Marburg, Lahn).*

Abramseco, N.: Sur le cercle d'univalence d'une fonction holomorphe $f(x)$ et sur la plus petite distance entre deux zéros d'une équation $f(x) = A$. C. R. Acad. Sci., Paris **194**, 834—836 (1932).

Outre la détermination du rayon d'univalence d'une fonction par une méthode semblable à celle donnée par M. Colugaréano (vgl. dies. Zbl. **3**, 162) on donne une borne inférieure pour la distance entre deux zéros de $f(z) - A = 0$. *Mandelbrojt.*

● **Julia, Gaston: Principes géométriques d'analyse. II. Pt. Recueillies et rédigées par André Magnier.** (Cahiers scient. Fasc. **11**.) Paris: Gauthier-Villars et Cie. 1932. VII, 121 S. u. 37 Abb. Frs. 40.—.

Der zweite Teil dieser Arbeit ist hauptsächlich dem Prinzip des Maximums und seinen zahlreichen Erweiterungen und Verallgemeinerungen gewidmet. In erster Linie steht das sog. Phragmén-Lindelöfsche Prinzip, dessen große Bedeutung für die ganze Funktionentheorie mit Nachdruck hervorgehoben wird. Auch seine Verallgemeinerung

durch Carleman und der Zweikonstantensatz von Nevanlinna und Ostrowski werden berücksichtigt. Allerdings vermißt man die Anwendungen des letztgenannten Satzes. — Aus dem Prinzip des Maximums folgt das Schwarzsche Lemma, welches von Lindelöf zu dem sog. Lindelöfschen Prinzip erweitert worden ist. Der Verf. gibt eine äußerst ausführliche Darstellung dieses Prinzips unter Einschluß aller Anwendungen: Schranken für die Funktionen ohne Nullstellen und für die Funktionen mit beschränktem Realteil, Beweis des Picard-Landauschen Satzes usw., alles in engem Anschluß an Lindelöf. — Im letzten Abschnitt wird schließlich die Theorie der Mittelwerte des Moduls einer analytischen Funktion entwickelt, sowohl nach den Arbeiten von Hardy, Littlewood und dem Verf., als mit Hilfe der Rieszschen Theorie der subharmonischen Funktionen. *Ahlfors (Paris).*

● **Montel, Paul: Leçons sur les fonctions entières ou méromorphes. Recueillies et rédig. par P. Sergesco. (Publ. du sémin. math. de l'univ., Cluj.) Paris: Gauthier-Villars et Cie. 1932. XIV, 116 S. Frs. 30.—.**

„M. Sergesco a jugé utile de publier une série d'ouvrages, placés entre les traités classiques et les mémoires originaux: ils conduiront ainsi les travailleurs au seuil même des régions où s'élabore la recherche mathématique.“ — Der vorliegende erste Band dieser Sammlung behandelt auf etwa 70 Seiten Nevanlinnas Theorie der meromorphen Funktionen und auf 30 Seiten Montels Theorie der Normalfamilien. Die Darstellung ist flüssig und für erste Lektüre geeignet. Doch kann nicht verschwiegen bleiben, daß solche Dinge bevorzugt werden, worüber es bereits treffliche Darstellungen in Buchform gibt [Julia, Montel, Nevanlinna in der Collection Borel]; über diese geht das vorliegende Werk methodisch gar nicht, inhaltlich nur in einigen Andeutungen über neuere Literatur (bis 1929) hinaus, ohne aber auch nur Beweisskizzen zu bringen. Die Theorie der Normalfamilien wird bis zum Landauschen und Schottkyschen Satze geführt und bringt gerade noch die Existenz Juliascher Richtungen. Der Ref. fürchtet, daß „les travailleurs“ von hier noch einen recht weiten Weg bis zu den Schwellen der Forschung allein gehen müssen. *Ulrich (Marburg, Lahn).*

Selberg, Henrik L.: Beiträge zur Theorie der algebroiden Funktionen. Avh. Norske Vid. Akad. Oslo Nr 9, 1—22 (1932).

Der Verf. verallgemeinert zunächst einen Satz von Collingwood, der für gewisse Stellensorten einer Funktion das Eintreten positiven Defekts ausschließt: Sei $f(z) = z$ eine algebroide Funktion, \mathfrak{X} und \mathfrak{Y} die Riemannschen Flächen, die hierdurch aufeinander bezogen werden. Für eine Stellensorte a gebe es eine ε -Umgebung in der Sortenebene, $|z - a| < \varepsilon$, über der sich die Fläche \mathfrak{Y} entweder gar nicht verzweigt oder aber nur über der Stelle a selbst algebraische Verzweigungen von beschränkter Verzweigungsordnung besitzt (a heiße dann gewöhnliche Sorte bzw. algebraische Sorte von endlicher Ordnung). Für jede solche Sorte wird gezeigt, daß die Schmiegungsfunktion durch

$$m(r, a) = m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = O[\log T(r, f)] + O(\log r)$$

abgeschätzt werden kann, mit den bekannten Ausnahmestellen im Falle unendlich hoher Wachstumsordnung. Collingwood hatte dies für meromorphe Funktionen endlicher Ordnung und nur gewöhnliche Sorten bewiesen. Als Beweismittel dienen neben der Theorie der meromorphen Funktionen Hilfsfunktionen aus der Uniformisierungstheorie (Überlagerungsflächen) und der Blochsche Satz. — Zweitens werden Betrachtungen über Abelsche Integrale angestellt, deren Umkehrfunktionen algebroid sind; hierfür werden Kriterien angegeben, die sich auf Integrale mit höchstens logarithmischen Singularitäten beziehen, also auf Integrale 1. und gewisse von 3. Gattung. Diese Betrachtungen erfahren eine Anwendung auf Konstruktion einer Zuordnung von Flächen \mathfrak{X} und \mathfrak{Y} , wo \mathfrak{Y} in endlich vielen Sorten a_v , überall nur genau τ_v -fache Verzweigungsstellen haben soll, die alle aus genau λ_v -fachen Stellen von \mathfrak{X} abgebildet werden; τ_v und λ_v sind so zu wählen, daß die Defektrelation in der Form $\sum (\tau_v - \lambda_v) : \tau_v = 2$ erfüllt ist (vgl. dies. Zbl. 3, 212). Hier ergeben sich — ähnlich wie in einer früheren Arbeit des Verf. — enge Zusammenhänge mit den elliptischen Funktionen. Die angegebenen Beispiele setzen aber durchweg $\lambda_v = 1$, also $\mathfrak{X} = x$ -Ebene voraus. Endlich noch ein Satz über die Koeffizienten in der Gleichung einer Algebroide, die mit einer

meromorphen Funktion durch eine irreduzible Gleichung verknüpft ist: Sie sind entweder alle rational von einer meromorphen Funktion abhängig oder elliptische

Funktionen einer Größe $u = \int^x \sqrt{P(t)} dt$, wo $P(t)$ ein Polynom ist. *Ulrich.*

Selberg, Henrik L.: Über einige transzendente Gleichungen. Avh. Norske Vid. Akad. Oslo Nr 10, 1—8 (1932).

Durch Anwendung des Phragmén-Lindelöfschen Satzes werden der folgende Satz und einige ähnlichen Sätze bewiesen: Wenn $g(z)$ ganz ist und einer Gleichung

$$\{g(z)\}^n + A_1(z) \{g(z)\}^{n-1} + \dots + A_n(z) = 0$$

genügt, deren Koeffizienten von der Form

$$A_\nu(z) = a_{\nu 1} \cdot e^{\alpha_{\nu 1} z} + \dots + a_{\nu m} \cdot e^{\alpha_{\nu m} z}$$

sind, dann ist

$$f(z) = c_1 e^{\gamma_1 z} + \dots + c_k e^{\gamma_k z}. \quad \text{R. Schmidt (Kiel).}$$

Petersson, Hans: Ein Fundamentalsatz aus der Theorie der ganzen automorphen Formen. Math. Ann. 106, 343—368 (1932).

Beweis der Sätze: 1. Es sei Γ eine Grenzkreisgruppe mit endlich vielen Erzeugenden und mindestens einer parabolischen Substitution; sei ferner $r > 2$ und $v(L)$ ein Multiplikatorsystem für die $L \subset \Gamma$ von der Dimension $-r$ und mit der Eigenschaft, daß $|v(L)| = 1$ für alle $L \subset \Gamma$. Dann läßt sich jede ganze, in allen parabolischen Spitzen verschwindende automorphe Form aus bestimmten endlich vielen Funktionen

$$G_{-r}(\tau; v; A, \Gamma; R_\nu) = \sum_{M \subset \mathfrak{S}(A)} \frac{e^{\frac{2\pi i M \tau}{N}}}{v(M)(m_1 \tau + m_2)^r}$$

linear zusammensetzen. 2. Es sei N eine natürliche Zahl. Jede ganze, in allen parabolischen Fixpunkten der $\Gamma(N)$ verschwindende Modulform N -ter Stufe von der Dimension -2 (Integrand erster Gattung) läßt sich aus bestimmten endlich vielen Funktionen $G_{-2}(0; \tau; A, N; P)$, wo

$$G_{-2}(s; \tau; A, N; P) = \sum_{M \subset \mathfrak{S}(A)} \frac{P\left(e^{\frac{2\pi i M \tau}{N}}\right)}{(m_1 \tau + m_2)^2 |m_1 \tau + m_2|^s}$$

($P(x)$ ein Polynom mit verschwindendem konstanten Glied), linear zusammensetzen. (Vgl. die inzwischen in Acta math. 58 erschienene Arbeit des Verf. „Über die Entwicklungskoeffizienten der automorphen Formen“; dies. Zbl. 3, 350.)

Myrberg (Helsinki).

Basoco, Miguel A.: On the Fourier series expansions of certain Jacobian elliptic functions. Tôhoku Math. J. 35, 35—42 (1932).

Verf. stellt die Fourier-Entwicklungen für die dritten und vierten Potenzen der Jacobischen elliptischen Funktionen auf. Es handelt sich, wenn man letztere durch Thetafunktionen ausdrückt, um die Entwicklungen der dritten und vierten Potenzen der Funktionen

$$\vartheta_2 \vartheta_3 \frac{\vartheta_1(u)}{\vartheta_0(u)}, \quad \vartheta_2 \vartheta_3 \frac{\vartheta_0(u)}{\vartheta_1(u)}, \quad \vartheta_2 \vartheta_3 \frac{\vartheta_2(u)}{\vartheta_3(u)}, \quad \vartheta_2 \vartheta_3 \frac{\vartheta_3(u)}{\vartheta_2(u)},$$

ferner der acht Funktionen, die aus diesen vier durch zyklische Vertauschung der Indizes entstehen, wenn man die Indizes der ϑ -Nullwerte in 0,2 und 0,3 abändert. Dabei sind π und $\pi\tau$ die Perioden. Die entstehenden Reihen sind bis auf Glieder der Form $\sin^{-n}u$, $\cos^{-n}u$, $n \leq 4$, reine Fourier-Reihen in u und Potenzreihen in $q = e^{\pi i \tau}$; in dieser letzteren Eigenschaft werden sie besonders übersichtlich durch Reihen des Typus

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{q^n}{1 \pm q^n} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{q^n}{1 \pm q^{2n}}$$

dargestellt. (Im Nenner ist ein festes der beiden Vorzeichen zu wählen.) *Petersson.*

Fubini, G.: Su un teorema del Severi per le funzioni analitiche di due variabili. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 14, 453—455 (1931).

Démonstration du théorème de Wirtinger-Severi (voir par ex. Zbl. 2, 342): étant donnée, dans l'espace de deux variables complexes $x = x_1 + i x_2$, $y = y_1 + i y_2$, une hypersurface analytique Δ à 3 dimensions réelles, pour qu'une fonction $u + i v$ analytique des 3 paramètres réels dont dépend Δ soit la trace, sur Δ , d'une fonction $U(x_1, x_2, y_1, y_2) + i V(x_1, x_2, y_1, y_2) = f(x, y)$ (f étant analytique par rapport aux variables complexes x et y), il faut et il suffit que u et v satisfassent à un système de deux équations (réelles) aux dérivées partielles du premier ordre.

Henri Cartan (Strasbourg).

Siewert, Werner: Zu den Abbildungen durch analytische Funktionen zweier komplexen Veränderlichen. Die Abbildungen der Hartogsschen Körper. Münster i. W.: Diss. 1931. 23 S.

Ein Bereich \mathfrak{H} des w - z -Raumes heißt ein Hartogsscher Körper mit der Symmetrieebene $z = 0$, falls er bei sämtlichen Transformationen:

$$T(\vartheta), \quad w' = w, \quad z' = z e^{i\vartheta} \quad (\vartheta \text{ beliebig reell})$$

in sich übergeht und mindestens einen Punkt der Symmetrieebene als inneren Punkt enthält. Die Transformationen $T(\vartheta)$ sind zugleich die einzigen (eindeutigen und analytischen) Abbildungen eines Hartogsschen Körpers auf sich, die die Symmetrieebene punktweise fest lassen. Verf. stützt sich im folgenden auf einen Satz von H. Cartan: „Jede Transformation eines Hartogsschen Körpers \mathfrak{H} auf sich, die zwei Punkte der Symmetrieebene ineinander überführt — eine sog. Haupttransformation —, hat die Form: $w' = f(w)$, $z' = z g(w)$ “; es wird hierbei, wie auch im folgenden, vorausgesetzt, daß \mathfrak{H} beschränkt ist und sich nicht durch eine Haupttransformation auf einen Reinhardtischen Körper abbilden läßt (ein solcher ist durch die Transformationen $w' = w e^{i\varphi}$, $z' = z e^{i\vartheta}$ definiert). Betrachtet man nun die Menge aller Haupttransformationen eines gegebenen Hartogsschen Körpers, so bilden die dabei auftretenden Funktionen $f(w)$ eine Gruppe $\Gamma^{(w)}$. Verf. untersucht im wesentlichen die Körper mit diskontinuierlicher Gruppe $\Gamma^{(w)}$. Er beweist den Satz: Ist die Gruppe $\Gamma^{(w)}$ eines Hartogsschen Körpers \mathfrak{H} diskontinuierlich und \mathfrak{H} kein allgemeiner Dizylinder, so ist jede Abbildung von \mathfrak{H} auf sich eine Haupttransformation. Die allgemeinste Abbildung eines allgemeinen Dizylinders, der zugleich ein Hartogsscher Körper ist, hat die Form: $w' = f(w)$, $z' = \frac{(z - z_0) e^{i\vartheta}}{\bar{z}_0 z - 1}$ (der Körper ist dabei so normiert, daß die Symmetrieebene den Einheitskreis ausschneidet). — Bemerkt sei noch, daß inzwischen H. Cartan (in einer in den Math. Ann. erscheinenden Arbeit) das Problem der Abbildungen der Hartogsschen Körper ganz allgemein gelöst hat. *Thullen.*

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Versicherungsmathematik:

Hostinský, B.: Méthodes générales du calcul des probabilités. Mém. Sci. math. H. 52, 1—66 (1931).

Das erste Kapitel ist der Methode der willkürlichen Funktionen (Ausgangsverteilungen) gewidmet. Vom Roulettenproblem ausgehend, zeigt Verf. an zahlreichen Beispielen (Nadelproblem von Buffon, Bewegung der Flüssigkeitsmoleküle, Verteilung der kleinen Planeten), wie die Methode allmählich alle möglichen Problemstellungen im Gebiet der sog. „geometrischen“ Wahrscheinlichkeiten beherrscht. Die beiden anderen Kapitel enthalten eine kurz gehaltene, aber inhaltsreiche Darstellung der Markoffischen Theorie „verketteter“ Vorgänge und deren Ausbreitung auf den Fall kontinuierlicher Größenreihen, die in den letzten Jahren Hadamard und der Verf. gegeben haben. Die Zentralprobleme sind hier: Existenz des Grenzmittelwerts und seine Unabhängigkeit vom Ausgangspunkt; Berechnung der zugehörigen Streuungen; Ableitung des normalen (Gauss-Laplaceschen) Charakters der Summenverteilungen.

Als Beispiele werden die mit dem Kartenmischen (Problem von Poincaré) verbundenen Fragestellungen, ein Urnenproblem und ein vom Verf. herrührendes Problem über die um ihre Achsen rotierende Kugel behandelt. Die Beweise sind in einigen Fällen ausführlich dargelegt; viele von den Ergebnissen der Theorie werden aber auch ohne Beweise angeführt.

A. Khintchine (Moskau).

Cultrera, R.: Breve osservazione sopra un concetto di convergenza di una successione di variabili casuali. Giorn. Ist. Ital. Attuari 3, 63—65 (1932).

Eine Bemerkung zu der im „Metron“, 1930, erschienenen Arbeit von Fréchet, „Sur la convergence en probabilité“. Es wird ein Vergleich zwischen der Fréchetschen Definition der Konvergenz einer Folge von Wahrscheinlichkeitsgrößen und dem bekannten Begriff der Konvergenz einer Folge von Verteilungsfunktionen gegen eine Grenzfunktion angestellt, und somit zwei Begriffe verglichen, die nichts miteinander zu tun haben.

Bruno de Finetti (Trieste).

Kondo, Tsutomu: A new method of finding moments of moments. Tôhoku Math. J. 35, 142—170 (1932).

Eine neue Methode zur Berechnung der Momente für die Schwankungspotenzen der Verteilung eines Merkmals bei endlicher Auswahl aus einer unendlichen Population wird ausführlich dargestellt, wobei auch für die Vereinfachung der Rechnungen viele Anweisungen gegeben werden. Für die vier ersten Potenzen der Schwankungen enthält die Abhandlung eine erschöpfende Beschreibung der Rechnungsprozedur.

A. Khintchine (Moskau).

Schoenberg, I. J.: On finite and infinite completely monotonic sequences. Bull. Amer. Math. Soc. 38, 72—76 (1932).

Ein neuer Beweis des Hausdorffschen Satzes über die Existenz der Lösung des Momentenproblems für das endliche Intervall $(0; 1)$.

A. Kolmogoroff (Moskau).

Hosiasson, J.: Why do we prefer probabilities relative to many data? Mind 40, 23—36 (1931).

Der Verf. untersucht den Einfluß und die Bedeutung, welche die Kenntnis einer größeren oder geringeren Anzahl von Umständen, die für ein Ereignis von Belang sind („relevance“ in der Terminologie von Keynes), auf die Bewertung der Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses haben könnte. Nachdem bemerkt wird, daß das Hinzutreten der Kenntnis eines neuen Umstandes sich nicht immer im Sinne einer Annäherung der Bewertung an die „endgültige“ auswirkt (d. h. an eine solche Bewertung, die auf der Kenntnis aller, einer bestimmten Gruppe angehörenden Umstände beruht) und daß eine solche Annäherung nicht einmal ohne weiteres als wahrscheinlich bezeichnet werden kann, fragt sich der Verf., ob die Wahrscheinlichkeit einer solchen Annäherung zumindest im Hinblick auf die durch die Kenntnis des neu hinzutretenden Umstandes geschaffene Bewußtseinslage behauptet werden könne. Diese letztere Frage wird vom Verf. bejaht.

Bruno de Finetti (Trieste).

Mazzoni, Pacifico: Contributo alla teoria degli accumuli. Giorn. Ist. Ital. Attuari 3, 37—53 (1932).

$N(0)$ sei die Anzahl der in gleichem Alter und zu gleicher Zeit eingetretenen Mitglieder einer Gesellschaft, $N(t)$ die Anzahl derjenigen von ihnen, welche nach t Jahren noch der Gesellschaft angehören. Jedes Mitglied zahlt im Zeitintervall $\langle t, t + dt \rangle$ den Beitrag $\pi(t) dt$. Das Ausscheiden der Mitglieder habe zwei Ursachen, welche sich in zwei von t abhängigen Ausscheideintensitäten ausdrücken. Beim Ausscheiden wegen der ersten Ursache gelangt ein nur von t abhängiger Betrag $S(t)$ zur Auszahlung, beim Ausscheiden wegen der zweiten Ursache wird ein dem bisher für jedes einzelne Mitglied angesammelten Kapital $C(t)$ proportionaler Betrag $A(t) \cdot C(t)$ ausgezahlt. Die Zinsintensität sei $i(t)$. — Unter diesen Annahmen wird $C(t)$ als Lösung einer Integralgleichung angeschrieben und daraus wird die angenäherte Rekursionsformel hergeleitet:

$$C(t+1) \cdot N(t+1) \sim [1 + r(t)] \cdot \varrho(t) \cdot C(t) \cdot N(t) + [1 + r(t)]^{1/2} \varrho^{1/2}(t) \cdot F(t);$$

dabei bedeutet $r(t) = e^{\int_t^{t+1} i(s) ds} - 1$ (effektiver Zinsfuß im Jahre $t, t+1$), $F(t)$ die Differenz zwischen allen Einzahlungen des Jahres $\langle t, t+1 \rangle$ und allen an die wegen der ersten Ursache Ausgeschiedenen geleisteten Auszahlungen, $\varrho(t)$ schließlich drückt sich auf einfache Weise durch die Anzahl der im Jahre $\langle t, t+1 \rangle$ wegen der zweiten Ursache Ausgeschiedenen und die Größen $N(t)$, $N(t+1)$, $A(t)$, $A(t+1)$ aus. — Eine analoge Näherungsformel wird auch für den allgemeineren Fall hergeleitet, daß die Gesellschaft keine besondere Evidenz über die in den einzelnen Jahren beitretenden Mitglieder gleichen Alters führt. Zum Schluß wird die Genauigkeit dieser Näherungsformeln abgeschätzt.

Birnbaum (Wien).

Lévy, Paul: Formules relatives au jeu de pile ou face. J. École polytechn., II. s. 29, 103—113 (1931).

Eine kurze Zusammenfassung der Abhandlung: Nuove formule relative al giuoco di testa e croce. Giorn. Ist. Ital. Attuari 2, 127—160 (1931). (Vgl. dies. Zbl. 1, 347.)
A. Kolmogoroff (Moskau).

Boldrini, M.: Le medie indici nella statistica. Rend. Semin. mat. fis. Milano 5, 174—182 (1931).

● **Schelling, Hermann von:** Die wirtschaftlichen Zeitreihen als Problem der Korrelationsrechnung. Mit besonderer Berücksichtigung der „lag“-correlation. (Veröff. d. Frankf. Ges. f. Konjunkturforsch. Hrsg. v. Eugen Altshul. H. 11.) Bonn: Kurt Schroeder 1931. 64 S.

Es seien x_1, x_2, \dots, x_N und y_1, y_2, \dots, y_N zwei statistische Reihen, die bzw. in den Zeitpunkten 1, 2, ..., N beobachtet sind. Die Trends der Reihen seien schon abgezogen, so daß die beiden Erwartungswerte 0 sind und die Reihen als Kollektivs im Sinne von v. Mises angesehen werden können. Eine Abhängigkeit der einen Reihe von der anderen wird sich im allgemeinen (insbesondere bei wirtschaftlichen Reihen) nicht momentan äußern; es wird vielmehr eine Abhängigkeit zwischen der einen Reihe und der um ein gewisses Zeitintervall verschobenen anderen bestehen. Um derartige Korrelationen festzustellen, wird folgendes Verfahren vorgeschlagen. Man denke sich die Reihen nach beiden Seiten periodisch fortgesetzt und bilde den Korrelationskoeffizienten r_n der Reihen x_1, x_2, \dots, x_N und $y_{n+1}, y_{n+2}, \dots, y_{n+N}$, wo n eine ganze Zahl zwischen $-N$ und N ist. Aus der Gesamtheit der Werte von r_n können Schlüsse über die Abhängigkeit der Reihen gezogen werden. Hat z. B. r_n für $n = a > 0$ ein ausgeprägtes Maximum, so wird man folgern können, daß x auf y mit der Verzögerung a wirkt. Ist $a < 0$, so wird eine Wirkung von y auf x vorliegen. Auch gegenseitige Einwirkung von x und y kann unter Umständen erkannt werden. Die Verhältnisse je zweier r_n sind gegen die Unsicherheit in der Bestimmung des Trend relativ unempfindlich. Sie ändern sich bei Abänderung des Trend nur von zweiter Ordnung. Zur numerischen Berechnung der Korrelationskoeffizienten r_n wird ein einfaches mechanisches Verfahren angegeben, das die Aufgabe im wesentlichen auf mit Polariplanimetern einfach ausführbare Inhaltsbestimmungen zurückführt. W. Fenchel.

● **Bisconeini, Giulio:** Lezioni di matematica finanziaria e attuariale. 4. ediz. completamente rinnovata e arricchita di numerose applicazioni ed esercizi e di 7 tavole numeriche. Roma: A. Signorelli 1931. 274 S. L. 20.—

Broggi, Ugo: Le funzioni quasi-interpolari e l'interpolazione nella matematica attuariale. Giorn. Ist. Ital. Attuari 3, 7—16 (1932).

Die natürlichen Zahlen r, n und die reelle Zahl $\varrho > 0$ seien gegeben; k sei die kleinste ganze Zahl ≥ 0 , für welche $r - k \equiv 0 \pmod{n}$. Als „la funzione quasi-interpolare d'indice r “ wird die in der ganzen komplexen Ebene definierte Lösung $P_r(u)$ der Differenzengleichung $F(u) - \varrho^n F(u+n) = 0$ bezeichnet, welche den Anfangsbedingungen $P_r(k) = \varrho^{r-k} \frac{n}{\pi} \sin \frac{\pi}{n}$ und $P_r(m) = 0$ für $m \neq k$, $0 \leq m < n-1$ genügt und von der Form $P_r(u) = \varrho^{-u} \sum_{\nu=0}^{n-1} C_\nu e^{2\pi i \nu u/n}$ ist. Ihre Eigenschaften werden untersucht

und für Interpolationszwecke, insbesondere zur Darstellung der Grundgrößen der Versicherungsmathematik, benützt. *Birnbaum* (Wien).

Berger, Alfred: Über die Berechnung der Leibrente bei Veränderung des Zinsfußes. Skand. Aktuarie Tidskr. 15, 78—81 (1932).

Guldberg, Alf: A remark on the Pearsonian frequency curves. Skand. Aktuarie Tidskr. 15, 82—85 (1932).

Borch, Fredrik: Über das Makehamsche Gesetz und das Zinsfußproblem bei der Leibrente. Skand. Aktuarie Tidskr. 15, 86—94 (1932).

De Finetti, Bruno: Probabilità fuori dagli schemi di urne. Period. Mat., IV. s. 12, 40—51 (1932).

Verf. gibt die Lösung einiger einfacher Aufgaben über die Wahrscheinlichkeiten von Unglücksfällen bei der Luftfahrt. *A. Kolmogoroff* (Moskau).

Geometrie.

Rutter, Dryden: The polar properties of the plane trinodal quartic curve. Proc. Edinburgh Math. Soc., II. s. 3, 30—36 (1932).

Der Ort für alle Punkte, deren 1. Polare in bezug auf eine ebene rationale Kurve 4. Ordnung (Kanonische Gleichung) eine harmonische Kurve 3. Ordnung wird, ist eine Kurve 6. Ordnung T_6 . Es wird die Existenz von 4 Kegelschnitten nachgewiesen, welche T_6 in je 6 Punkten berühren. Andere Kurven 6. Ordnung, welche dieselben Kegelschnitte in 6 Punkten berühren. *E. A. Weiss* (Bonn).

Vogelsang, Werner: Eine Verallgemeinerung der konfokalen Flächen zweiter Ordnung. Math. Z. 35, 25—38 (1932).

Im Riemannschen R_3 werden 3 paarweise orthogonale Flächenscharen gesucht, die analog den konfokalen F_2 folgende Eigenschaft haben: Die gemeinsamen geodätischen Tangenten je zweier Flächen bilden eine Normalenkongruenz. — Wählt man die gesuchten Flächen als Koordinatenflächen, so ist das Problem gleichbedeutend mit 3 partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung in den Koeffizienten g_{ik} des auf diese Koordinaten bezogenen Bogenelements. Wie Blaschke gezeigt hat, genügt das Bogenelement von Stäckel diesen Gleichungen. Setzt man speziell voraus, daß im zugrunde gelegten R_3 alle diejenigen Komponenten des Krümmungstensors verschwinden, die 3 verschiedene Indizes haben, so wird bewiesen, daß es keine andere Lösung des Problems gibt als einen Spezialfall des Stäckelschen Bogenelements, in dem es zugleich Liouvillesch ist. Hieraus folgt dann mit Hilfe eines Satzes von Blaschke, daß im euklidischen Raum die konfokalen F_2 die einzige Lösung des Problems darstellen. *Cohn-Vossen* (Köln).

Barbilian, D.: Geometrischer Aufsatz. Gaz. mat. 37, 81—89 u. 166—172 (1931) [Rumänisch].

Gegenstand der Untersuchung ist eine Doppelfünf von Punkten der Möbiusschen Ebene:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ a' & b' & c' & d' & e' \end{vmatrix}$$

mit der Eigenschaft, daß irgend 2 Punkte einer Zeile zueinander in bezug auf den durch die 3 nichthomologen Punkte der anderen Zeile bestimmten Kreis invers sind. Zu dieser Figur wird der Verf. folgendermaßen geführt: 4 Punkte A, B, C, D bestimmen, zu je 3 verbunden, 4 Kreise mit den Mittelpunkten A', B', C', D' , die den Punkten A, B, C, D in einer eigentlichen involutorischen Kreisverwandtschaft T entsprechen. Der dem Punkte ∞ durch T zugeordnete Punkt sei E . Dann bilden die Punkte:

$$\begin{vmatrix} A & B & C & D & E \\ A' & B' & C' & D' & \infty \end{vmatrix}$$

eine Doppelfünf mit der genannten Eigenschaft. An Hand dieses Beispiels wird die Konfiguration studiert (Eigenschaften des Punktes E , Konstruktion der Figur aus 5 vorgegebenen Punkten usw.) Die Eigenschaften der allgemeinen Doppelfünf ergeben sich dann durch Anwendung einer Kreisverwandtschaft. *E. A. Weiss* (Bonn).

Pomey, Léon: Complément à la théorie géométrique des involutions d'ordre supérieur portées par une transversale unieversale. Suite du problème de Pascal-Chasles. Généralisation des polygones de Poncelet. J. Éc. polytechn., II. s. 29, 115—144 (1931).

Als unmittelbare Fortsetzung der Arbeit Zbl. 2, 147 wird, wiederum unter ausschließlicher Benutzung synthetischer Hilfsmittel, die Theorie der Involutionen höherer Ordnung weiter entwickelt. Von der Lösung der Hauptaufgabe — die ϱ Involutionen I_n gemeinsamen Punkt- n -tupel zu finden —, die auf zwei verschiedene Weisen gegeben wird, werden folgende Anwendungen gemacht: Die Schnittpunkte einer Geraden mit einer durch 9 Punkte definierten ebenen Kurve 3. Ordnung (als Schnittpunkte zweier Kegelschnitte mit bekanntem 4. Schnittpunkt) zu finden. Das Schnittpunktsystem einer durch 14 Punkte bestimmten C^4 mit einer durch 4 — ϱ dieser Punkte laufenden Geraden zu konstruieren. (Diese Konstruktion führt zu einer Erzeugung der C^4 .) Das Restschnittpunktsystem einer durch 9 Punkte bestimmten F^2 mit einer durch 6 — ϱ dieser Punkte laufenden kubischen Raumkurve zu finden. Eine durch 20 Punkte bestimmte C^5 mit einer Geraden zum Schnitt zu bringen, die Kurve zu erzeugen und die Bedingung dafür anzugeben, daß sie einen 21. Punkt enthält. Den Schluß bildet eine Verallgemeinerung der Ponceletschen Polygone: An Stelle der beiden Kegelschnitte treten 2 rationale Kurven beliebig hoher Ordnung, an Stelle der Seiten des Polygons Stücke von Kurven eines 2-parametrischen Kurvensystems.

E. A. Weiss (Bonn).

Campbell, A. D.: Apolarity in the Galois fields of order 2^n . Bull. Amer. Math. Soc. 38, 52—56 (1932).

The tangent planes of a quadric

$$\sum a_{ij} x_i x_j = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, m; j \geq i)$$

in a field of characteristic 2 are given by an equation of one of the two following forms:

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & u_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & 2a_{mm} & u_m \\ u_1 & u_2 & \dots & u_m & 0 \end{vmatrix} = \sum A'_{ij} u_i u_j = 0, \quad (\text{for } m \text{ even})$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1m} & u_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & 0 & u_m \\ u_1 & u_2 & \dots & u_m & 0 \end{vmatrix} = \sum A_{ii} u_i^2 = 0. \quad (\text{for } m \text{ odd})$$

In the latter case all polar and tangent hyperplanes pass through a common point $P\{\sqrt{A_{11}}, \sqrt{A_{22}}, \dots, \sqrt{A_{mm}}\}$. If now apolarity of two quadrics is defined by the vanishing of the coefficient of $\lambda^2 \mu^{m-2}$ (for m even) resp. $\lambda \mu^{m-1}$ (for m odd) in the discriminant of the form

$$\sum (\lambda b_{ij} + \mu a_{ij}) x_i x_j,$$

then we have, for m odd, the condition of apolarity

$$\sum b_{ij} A_{ij} = 0,$$

which signifies that the point quadric $\sum b_{ij} x_i x_j = 0$ passes through the point P , defined above.

Godeaux, L.: Sur une surface algébrique de genres zéro et de bigenre deux. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 14, 479—481 (1931).

Beispiel einer algebraischen Fläche ohne kanonische Kurven und mit bikanonischen Kurven. Es ist die F^7 : $a_1 x_1^4 x_2 x_4^2 + a_2 x_3^2 x_4 x_3^2 + a_3 x_3^4 x_1 x_2^2 + a_4 x_4^4 x_3 x_1^2 = 0$,

wobei $x_1 x_2 x_3 x_4$ projektive homogene Punktkoordinaten sind. Diese F^7 hat vier Selbstberührungsgersten: $x_1 = x_2 = 0$, $x_2 = x_4 = 0$, $x_3 = x_4 = 0$, $x_1 = x_3 = 0$; die ein windschiefes Vierseit bilden. Das geometrische und das arithmetische Geschlecht p_g und p_a sind beide Null. Das 2-Geschlecht P_2 hat den Wert 2, da die biadjungierten Flächen F^6 die Gleichung besitzen:

$$x_1 x_2 x_3 x_4 (\lambda_1 x_1 x_4 + \lambda_2 x_2 x_3) = 0.$$

Es ist außerdem: $p^{(1)} = 2$, $P_3 = 4$, $P_4 = 7$. Die F^7 ist ein besonderer Fall allgemeinerer Flächen, die man als Bilder gewisser zyklischen Involutionen auf regulären Flächen konstruieren kann und die der Verf. in einer anderen größeren Arbeit studieren wird.

E. G. Togliatti (Genova).

Todd, J. A.: Some important doubly infinite line systems in higher space. Proc. London Math. Soc., II. s. **33**, 328—352 (1932).

In dieser Arbeit werden algebraische ∞^2 Strahlensysteme in einem n -dimensionalen Raume S_n betrachtet und durch die übliche Grassmannsche Abbildung der Geraden des S_n auf den Punkten einer Fläche abgebildet. Es werden nur solche ∞^2 Strahlensysteme betrachtet, die eine V_3 einfach bedecken und deren Bildflächen rationale oder elliptische Schnittkurven besitzen. So werden jene wohlbekannten Flächen mit den ebenso wohlbekannten V_3 mit rationalen oder elliptischen Schnittkurven in Verbindung gebracht. Am Ende die Darstellung der ∞^3 Geraden einer V_3^2 des S_4 mit den Punkten einer Veroneseschen V_3^3 des S_5 .

Einige Bemerkungen: Unter den V_3 mit elliptischen Schnittkurven (S. 336, § 3, 21) fehlt der Fall 6 der Klassifikation von F. Enriques [Math. Ann. **46**, 197 (1895)]; dieser Fall führt zu einer V_3^6 mit einem einzigen ∞^2 Strahlensystem (1, 3) [s. G. Scorza, Ann. di Mat. (3) **15**, 251 (1908)]. Die Postulation $2n$ einer elliptischen Normal- C^n eines S_{n-1} für die Hyperflächen 2. Ordnung des S_{n-1} (S. 349—350) erhält man unmittelbar aus der Dimension der Linear-schar g_{2n-1}^{2n-1} , die auf der C^n von jenen Hyperflächen ausgeschnitten wird. Die Literatur ist nicht immer vollständig und genau; so findet man z. B. den Satz zu S. 334 (Ende § 2. 1) schon bei Comessatti [Atti Ist. Veneto **80**, 390 (1920—1921)]; die Abbildung Ende S. 347 der Geraden eines S_4 ist von S. Kantor [J. rein angew. Math. **118** (1897), Theorem LX] angegeben und studiert worden.

E. G. Togliatti (Genova).

Crenna, M.: Sulle congruenze di Ribaucour deformabili. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **14**, 566—571 (1931).

Der Verf. betrachtet die Enveloppe von ∞^2 Kugeln im Falle (von Ribaucour), wo die Krümmungslinien der beiden Mäntel der Enveloppe sich entsprechen [s. L. Bianchi, Mem. Acc. Lincei (5) **12** (1918)], und studiert die Fälle, wo jene zwei Mäntel entweder dieselbe erste oder dieselbe zweite Grundform besitzen. Im ersten Falle kann man die Kugelkongruenz folgendermaßen konstruieren: man betrachte die ∞^2 Kugeln, die durch einen festen Punkt hindurchgehen und deren Mittelpunkte auf einer Ebene liegen; eine beliebige Verbiegung der Ebene ohne Änderung der Kugelradien ergibt die gesuchte Kugelkongruenz. Im zweiten Falle erhält man die Lösung ähnlicherweise durch Verbiegung der Mittelpunktsfläche aus den ∞^2 Kugeln, die als Mittelpunkte alle Punkte eines Drehparaboloids haben und die durch den Brennpunkt des Paraboloids hindurchgehen. Die Arbeit stützt sich sehr auf die obengenannte Abhandlung von L. Bianchi.

E. G. Togliatti (Genova).

Čech, Eduard: Réseaux R à invariants égaux. Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk Nr **143**, 1—29 (1931).

Ce Mémoire est divisé en deux parties. La première traite, d'une façon différente et complète, les questions — déjà envisagées par M. B. Segre dans la sixième partie de son Mémoire „Intorno alla teoria delle superficie proiettivamente deformabili e alle equazioni differenziali ad esse collegate“ [Mem. R. Acc. d'Italia **2** (1931); cf. Zbl. **3**, 221] — se rapportant à la détermination de toutes les surfaces (non réglées) qui possèdent ∞^1 réseaux R , dont un à invariants égaux; celles-ci se partagent en dix catégories, dont la plus générale dépend de six constantes arbitraires. Précisément, les quantités

β, γ, L, M de M. Fubini relatives à une telle surface, sont données par les formules

$$\beta = \varphi + \psi, \quad \gamma = \varphi - \psi$$

$$L = -\frac{3}{2}\varphi^2 - \frac{3}{2}\psi^2 - \varphi\psi + U, \quad M = -\frac{3}{2}\varphi^2 - \frac{3}{2}\psi^2 + \varphi\psi + V$$

(avec φ, ψ, U, V fonctions respectivement de $u+v, u-v, u, v$), et les différentes expressions qui ont φ, ψ, U, V suivant la catégorie à laquelle appartient la surface, sont résumées au n. 41. — Dans la seconde partie du travail, on montre qu'une surface non réglée contient au plus ∞^2 réseaux de M. Jonas, et qu'elle en contient autant si elle contient aussi ∞^2 réseaux R , et dans ce cas seulement; on peut en outre aisément déterminer complètement les surfaces qui admettent ∞^1 réseaux de M. Jonas, un de ces réseaux étant R . On prouve enfin que les réseaux de M. Jonas dépendent de six fonctions arbitraires d'un argument, c'est-à-dire ils ont la même généralité que les réseaux R .

Beniamino Segre (Bologna).

Borůvka, Otakar: Sur les hypercirconférences et certaines surfaces paraboliques dans l'espace euclidien à quatre dimensions. Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk Nr 146, 1—40 (1931).

Wird der vierdimensionale reelle euklidische Raum starr um einen Punkt in sich bewegt, so daß zwei aufeinander total senkrechte Ebenen E_{01} und E_{23} mit konstanter, aber verschiedener Winkelgeschwindigkeit in sich gedreht werden, so beschreiben die Punkte des R^4 , die weder auf E_{01} noch auf E_{23} liegen, „Hyperkreise“, das sind die allgemeinsten Kurven des R^4 , deren drei Krümmungen konstant und $\neq 0$ sind. Macht man die Ebenen E_{01} und E_{23} zu Koordinatenebenen und wählt man die Koordinatenachsen noch geeignet, so lautet demnach die Gleichung eines Hyperkreises

$$X = y \sin ps; X_1 = y \cos ps; X_2 = z \sin qs; X_3 = z \cos qs. \quad (y, z, p, q = \text{const}, \neq 0; p \neq q) \quad (1)$$

Es werden Eigenschaften der Hyperkreise gefunden, die zum Teil Verallgemeinerungen von Eigenschaften des gewöhnlichen Kreises sind. Betrachtet man in (1) außer s auch noch y oder z bzw. y und z als variabel, so erhält man zwei Flächen bzw. eine Hyperfläche, die dem Hyperkreis „assoziert“ sind. Von den assoziierten Flächen wird gezeigt, daß die Indikatrixellipse der Normalkrümmung in jedem Punkt M der Fläche durch M hindurchgeht, daß also die Fläche parabolisch ist, daß die Indikatrix in M einen Scheitel hat und daß das Achsenverhältnis für alle Punkte der Fläche konstant $\neq 2$ ist. Durch diese differentialgeometrischen Eigenschaften sind die den Hyperkreisen assoziierten Flächen sogar charakterisiert. *H. Seifert (Leipzig).*

Eisenhart, Luther Pfahler: Intransitive groups of motions. (*Dep. of Math., Univ., Princeton.*) Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 18, 193—202 (1932).

Verf. beweist folgenden Satz von Fubini [„Sugli spazii che ammettono un gruppo continuo di movimenti“. Annali di Matematica (3) 8, 40 (1903)]: Ist G_r eine intransitive Gruppe von Bewegungen einer V_n und haben die kleinsten invarianten Mannigfaltigkeiten die Dimensionszahl $q (\leq r, < n)$, so gibt es ein Koordinatensystem, in dem G_r eine transitive Gruppe in q Veränderlichen ist. Nachdem erst die wichtigsten Formeln der Geometrie des Gruppenkeims r -gliedriger Transformationsgruppen mit q -dimensionalem Transitivitätsbereich (die Liesche Matrix ξ_a^α ($\alpha = 1, \dots, n; a = 1, \dots, r$) hat dann den Rang $q < n$) aufgestellt worden sind, ergibt Anwendung auf Bewegungsgruppen einer V_n den Beweis des Fubinischen Satzes. Überdies wird bewiesen: „Jede r -gliedrige kontinuierliche Gruppe in n Veränderlichen, deren erzeugende Matrix den Rang $r (\leq n)$ hat, ist Bewegungsgruppe einer V_n , deren Fundamental-tensor $g_{\alpha\beta} \frac{1}{2}n(n+1)$ beliebige Funktionen von $n-r$ Veränderlichen enthält; es gibt ein Koordinatensystem in der V_n , derart, daß die ξ_a^α -Funktionen von x^1, \dots, x^r allein sind, während die kleinsten invarianten Mannigfaltigkeiten durch $x^{r+1} = \text{const}, \dots, x^n = \text{const}$ definiert werden.“ „Ist die Fundamentalform definit, dann gibt es ein Koordinatensystem für das

$$\xi_a^\sigma = 0 \quad (\sigma = q+1, \dots, n) \quad (1)$$

ist, während die ξ_a^λ ($\lambda = 1, \dots, q$) Funktionen der x^1, \dots, x^n allein sind.“ Ist $\xi_p^\alpha = \xi_h^\alpha \varphi_p^h$ ($h = 1, \dots, q$, $p = q + 1, \dots, r$), dann gilt schließlich: „Ist die Fundamentalform indefinit und gibt es s ($\leq q$) unabhängige φ_p^h , und ist die Jacobische Fundamentalmatrix der s unabhängigen Funktionen nach den x^1, \dots, x^q vom Range s für jedes Koordinatensystem, das (1) genügt, dann gibt es ein Koordinatensystem, in dem die ξ_a^λ von x^1, \dots, x^q allein abhängen.“ *D. van Dantzig* (Delft).

Barba, G.: Trasporti metrici di punteggiate e trasporti rigidi di fasci. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 14, 468—471 (1931).

Auf einer V_2 (Fläche mit Riemannscher Maßbestimmung) sei ein Pseudoparallelismus (der nicht mit dem Levi-Civitaschen übereinzustimmen braucht) als winkeltreue Abbildung benachbarter Bündel von Richtungen gegeben; ein solcher ist durch Angabe des Bildes einer Anfangsrichtung festgelegt. Verf. beweist für den Fall, daß die V_2 die Riemannsche Ebene ist, daß der Parallelismus einen „Metrismus“ (isometrische Abbildung benachbarter geodätischer Linien aufeinander, festgelegt durch Angabe des Bildes eines Anfangspunktes) erzeugt, den man einfach durch Polarisierung erhält. Die Dualität zwischen Parallelismus und Metrismus wird erläutert durch Betrachtung der Kurve γ , die umhüllt wird von den Polaren eines Punktes, der eine (insbesondere autoparallele) Kurve c durchläuft. Es werden zwei Spezialfälle betrachtet und die entsprechenden Überlegungen für die euklidische und die Lobatschefskysche Ebene durchgeführt. *D. van Dantzig* (Delft).

Bortolotti, Enea: Connessioni affini associate ad una $(n + 1)$ -pla di congruenze in una varietà n -dimensionale. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 14, 462—468 (1931).

$n + 1$ Kurvenscharen in einer X_n seien durch die — vermöge $\sum_{\alpha=0}^n X^\alpha = 0$ bis auf einen gemeinsamen Skalarfaktor normierten — Tangentialvektorfelder X^α festgelegt. Dann erhält man eine (integrable) affine Übertragung, indem man jeweils die Vektoren der Felder X^α für gleich erklärt. Unter den Übertragungen mit gleichem Parallelismus ist eine, P_{ik}^j , durch das Verschwinden ihres „Einsteinischen Vektors“ $\frac{1}{2}(P_{i\nu}^\nu - P_{\nu i}^\nu)$ ausgezeichnet (Vgl. für $n = 3$ Blaschke, T. 19, Flächengewebe und ihre Diagonalen, Hamb. Abh. 8; einfache geometrische Deutungen in der Arbeit des Verf. „Sulla geometria delle varietà a connessione affine. Teoria . . .“, Annali di Matematica (IV) 8.) Es gibt ferner Riemannsche Übertragungen mit denselben geodätischen Linien, deren Fundamentaltensor für $n > 2$ aus dem Rotationstensor $\frac{1}{2}(P_{ik}^i - P_{ki}^i)$ durch zweimalige Überschiebung mit sich zu erhalten ist; desgleichen ebensolche halbsymmetrische Übertragungen, die sich eindeutig als metrische auffassen lassen, wenn man ein Multiplum des Einsteinischen Vektors als Eichvektor vorschreibt. An das letzte Ergebnis schließt sich eine kurze Diskussion des P. Straneoschen Ansatzes in der vereinigten Feldtheorie. *Zorn* (Hamburg).

Vincensini, P.: Sur la déformation des surfaces et sur quelques propriétés des surfaces spirales. Bull. Soc. Math. France 59, 211—228 (1931).

Le mémoire examine la déformation simultanée de la surface (S) et de la congruence (C) des droites D perpendiculaires aux plans tangents π de (S) et invariablement liées avec eux. Le théorème fondamental: „le produit des distances $\overline{KF} \cdot \overline{KF'}$ des deux foyers F, F' situés sur le rayon D au plan tangent π reste invariable au cours de la déformation arbitraire de (S) “ est due à Ribaucour (Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes. 1891; J. Math. (4) 7, 79); c'est ce que l'auteur, semble-t-il, ne remarque pas. En soumettant (S) à l'homothétie de centre O et de rapport λ sans modifier les distances \overline{MK} des points M de (S) aux rayons correspondants D , l'auteur obtient à la limite $\lambda = 0$ une nouvelle transformation de la congruence: Menons par O le vecteur (OI) équipollent à (MK) et par I la parallèle Δ à D ; l'ensemble des droites Δ constitue une congruence dont le produit des distances des deux foyers

$\overline{IF} \cdot \overline{IF'}$ reste invariable au cours de la déformation arbitraire de (S) . Certaines spécifications de la surface (S) et de la congruence (C) amènent l'auteur aux résultats particuliers énoncés en partie dans ses publications précédentes. Il examine tout spécialement le cas d'invariance des distances KF, KF' des foyers en question; c'est ce que le ramène aux surfaces spirales de Maurice Levy. Les développables de la congruence (C) correspondent alors aux asymptotiques de (S) , d'où suit que la surface centrale (Σ) de la congruence correspond pendant toute la déformation en question à la surface spirale (S) avec orthogonalité des éléments linéaires.

S. Finikoff (Moscou).

Marchaud, A.: Sur les demi-sécantes limites et sur les semi-tangentes. C. R. Acad. Sci., Paris **194**, 948—951 (1932).

Als eine geometrische Verallgemeinerung des Begriffes der einseitigen Stetigkeit einer Funktion führt Verf. für n -dimensionale euklidische Räume R_n (im Text ausführlich für R_3) folgende Begriffsbildung ein. Sei $\Pi \subset R_3$ eine beliebige Ebene und Ox eine zu Π nicht parallele Halbachse. Unter Abszisse eines Punktes ist die seiner zu Π parallelen Projektion auf Ox zu verstehen. Eine beschränkte Punktmenge $E \subset R_3$ heißt dann in der Richtung von Π Ox -seitig abgeschlossen, wenn jede Punktfolge von E mit wachsenden Abszissen einen zu E gehörenden Häufungspunkt besitzt. Dadurch werden die Begriffe von Halbsekante, Grenzhalfsekante, Semitangente und Halbtangente gewonnen und schließlich, als Anwendungen, einige Sätze (ohne Beweis) angegeben, u. a. hinreichende Bedingungen dafür, daß eine Funktion der reellen Veränderlichen die Lipschitzsche Bedingung erfülle, daß eine Jordansche Kurve rektifizierbar sei, sowie daß dieselbe eine sich stetig verändernde Tangente besitze.

B. Knaster (Warszawa).

Borsuk, Karol: Sur la notion de contractibilité locale des ensembles. C. R. Acad. Sci., Paris **194**, 951—953 (1932).

Verf. nennt eine Menge E in einem Punkte $p \in E$ lokal zusammenziehbar, wenn jede Umgebung $U \subset E$ von p eine Teilumgebung V von p enthält, die innerhalb U auf p stetig zusammengezogen werden kann, d. h. wenn jedem Punkt $x \in V$ für jedes t mit $0 \leq t \leq 1$ ein von x und t stetig abhängender Punkt $f(x, t) \in U$ so zugeordnet werden kann, daß $f(x, 0) = x$ und $f(x, 1) = p$ ist (offenbar ist dann E in p lokal zusammenhängend; aber nicht umgekehrt). E heißt zusammenziehbar schlechthin, wenn sie es in jedem ihrer Punkte ist. Eine kompakte Menge E der Ebene ist genau dann lokal zusammenziehbar, wenn sie lokal zusammenhängend ist, und die Ebene, wenn überhaupt, so nur in endlich viele Gebiete zerlegt. Liegt die kompakte, lokal zusammenziehbare Menge E im R_n ($n = 1, 2, \dots$), so zerfällt $R_n - E$ in höchstens endlich viele Gebiete G_i ; jeder Punkt der Begrenzung von G_i ist von G_i aus erreichbar, d. h. mit jedem Punkt von G_i durch einen bis auf den einen Endpunkt ganz in G_i enthaltenen Bogen verbindbar; die Begrenzung von E ist lokal zusammenhängend. (Nach brieflicher Mitteilung des Verf. sind auf S. 952 in dem Satz „Dans la suite j'entendrai...“ hinter „métriques“ die Worte „de dimension finie“ einzufügen.) *Nöbeling (Wien).*

Mazur, S., et S. Ulam: Sur les transformations isométriques d'espaces vectoriels, normés. C. R. Acad. Sci., Paris **194**, 946—948 (1932).

Es wird die von S. Banach [Sur les opérations dans les ensembles abstraits; Fundam. Math. **3**, 133 (1922)] herrührende Definition der vektoriellen normierten Räume angeführt und folgender Satz bewiesen: jede isometrische Abbildung eines vektoriellen normierten Raumes auf einen ebensolchen Raum, bei welcher das Nullelement in ein Nullelement übergeht, ist additiv. Der Beweis beruht auf Einführung des an sich interessanten Begriffes der metrischen Zentra, der bezüglich isometrischen Abbildungen invariant ist. Die Wichtigkeit des Ergebnisses liegt in der Möglichkeit, gewisse Sätze über isometrische Abbildungen vektorieller normierter Räume, darunter also der meisten bekannten Funktionalräume, von der Voraussetzung der Additivität zu befreien.

B. Knaster (Warszawa).

Čech, Eduard: *Trois théorèmes sur l'homologie*. Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk Nr 144, 1—21 (1931).

Die Arbeit enthält drei recht kompliziert klingende Sätze, die zum Ideenkreis der topologischen Additionssätze (bzw. des verallgemeinerten Phragmén-Brouwerschen Satzes) gehören. Da allein die Wiedergabe des Wortlautes der genannten Sätze etwa $1\frac{1}{2}$ Seiten in Anspruch nehmen dürfte, beschränken wir uns darauf, an einigen wichtigen Spezialfällen die Fragestellungen und die Resultate des Verf. klarzumachen. — 1. Es seien A_1, A_2, \dots, A_{2k} abgeschlossene ebene Mengen (die Ebene ist dabei durch den unendlich-fernen Punkt ergänzt). Die Menge $\sum A_i A_j$ ($1 \leq i < j \leq 2k$) bestehe aus höchstens s Komponenten, $s \geq 1$. Die Punkte p_0, p_1, \dots, p_s seien so gewählt, daß für $1 \leq \nu \leq 2k$, $0 \leq i < j \leq s$, die Punkte p_i und p_j durch einen einfachen Bogen verbunden werden können, ohne daß dabei eine der $2k - 1$ Mengen A_μ ($\mu \neq \nu$) getroffen wird. Dann gibt es unter den Punktepaaren p_i, p_j ein solches, das auch außerhalb aller Mengen A_ν durch einen einfachen Bogen verbunden werden kann. — 2. A_1 und A_2 seien zwei ebene Kontinua. Hat der Durchschnitt $A_1 \cdot A_2$ mehr als s (≥ 1) Komponenten, so gibt es eine gerade Anzahl von Punkten p_1, p_2, \dots, p_{2k} im Komplementärg Gebiet zu $A_1 + A_2$ derart, daß jede Komponente von $R^2 - A_1$ ebenso wie jede Komponente von $R^2 - A_2$ eine gerade Anzahl von Punkten p_i enthält, während es mindestens s Komponenten von $R^2 - (A_1 + A_2)$ gibt, von denen jede eine ungerade Anzahl der ebengenannten Punkte enthält. — Die Hauptsätze des Verf. dürfen als weitgehende mehrdimensionale Analoga dieser und ähnlich klingender Sätze betrachtet werden. Sie enthalten als Spezialfall den berühmten Additionssatz von Alexander [„Corollary W“ der Dualitätssatz-Arbeit; Amer. Trans. 23, 333—349 (1922)] und berühren nahe verschiedene Sätze von W. Mayer, Helly und dem Ref. Auch verschiedene „Zerschneidungssätze“ von Janiszewski, Kuratowski und Straszewicz sind als Spezialfälle in den Sätzen des Verf. enthalten. — Es sei noch das folgende Korollar des ersten Hauptsatzes des Verf. erwähnt. Sind A_1, A_2, A_3 ebene Kontinua mit nicht leerem Durchschnitt, und werden die Punkte p und q weder durch $A_1 + A_2$, noch durch $A_2 + A_3$, noch durch $A_1 + A_3$ getrennt, so werden sie auch durch $A_1 + A_2 + A_3$ nicht getrennt. Wenn man vom Durchschnitt $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$ nichts voraussetzt und drei Punkte p, q, r betrachtet, von denen keine zwei durch eine Menge der Form $A_i + A_j$ getrennt werden, so werden keine zwei der Punkte p, q, r auch durch $A_1 + A_2 + A_3$ getrennt. — Es ist interessant, zu bemerken, daß aus letzterem Ergebnis das bekannte Resultat von Kuratowski folgt, nämlich, daß ein Kontinuum, welches als gemeinsame Grenze dreier ebener Gebiete auftritt, entweder unzerlegbar oder Summe zweier unzerlegbarer Kontinua ist. Der Kuratowskische Satz wird also in eine ausschließlich mit dem Homologiebegriff operierende Theorie eingeordnet.

P. Alexandroff (Moskau).

Threlfall, W.: *Gruppenbilder*. Abh. math.-phys. Kl. sächs. Akad. Wiss. 41, Nr 6, 1—59 (1932).

Ein Gruppenbild ist ein zweidimensionales Zellsystem, das die Gruppe zu einer Gruppe von Selbstabbildungen und das einzelne Polygon zum Diskontinuitätsbereich hat. Es stellt also eine regelmäßig geteilte, geschlossene oder offene, orientierbare oder nichtorientierbare Fläche von beliebigem Geschlecht dar (§ 1). — Ist die Fläche geschlossen und besteht das Zellsystem aus einem einzigen Punkt und einem einzigen Polygon, so heißt das Zellsystem ein Poincarésches Fundamentalpolygon der Fläche. Jedes Zellsystem hat, wenn es nicht einfach zusammenhängend ist, unverzweigte Überlagerungszellsysteme (§ 2), insbesondere ein einfach zusammenhängendes Überlagerungszellsystem, das universelle (§ 3). — Es überlagert das Grundzellsystem regulär, d. h. es gibt eine für die Überlagerung charakteristische „Überlagerungsgruppe“ \mathfrak{F} von Deckbewegungen des Überlagerungszellsystems, die die einzelnen über einem Grundpolygon liegenden Polygone transitiv vertauscht (§ 4). — Der Diskontinuitätsbereich einer invarianten Untergruppe derjenigen Gruppe, die durch ein Gruppenbild dargestellt wird, ist Gruppenbild einer Quotientengruppe der gegebenen Gruppe, ein Satz, der auf beliebige Untergruppen erweitert wird. Umgekehrt läßt die Kenntnis eines Zellsystems und eines überlagernden Gruppenbildes Schlüsse auf die Existenz von Untergruppen der dar-

gestellten Gruppe zu (§ 5). Als Beispiele dienen die Poincaréschen Fundamentalpolygone, sowie das Zellsystem des Kepler-Poinsotschen Sternpolyeders vom Geschlechte $p = 4$. — Zu jeder diskreten Gruppe und jedem System ihrer Erzeugenden und Relationen lassen sich Gruppenbilder konstruieren (§ 8). Man beschränkt sich dabei zweckmäßig auf die von W. v. Dyck eingeführten Gruppenbilder, regelmäßige Polygonnetze (b_1, b_2, \dots, b_r) , die durch fortgesetzte Spiegelung aus einem Polygon entstehen (§ 6). Das universelle Überlagerungszellsystem eines solchen Polygonnetzes, das universelle Polygonnetz (b_1, b_2, \dots, b_r) , ist Gruppenbild der Polygonnetzgruppe $\mathfrak{H}(b_1, b_2, \dots, b_r)$ (§ 9). Die Ermittlung der Erzeugenden und Relationen aus einem gegebenen Dyckschen Gruppenbilde geschieht mit Hilfe des zugehörigen Dehn'schen Gruppenbildes (§ 7). — In einem zweiten Teil wird das Beispielmateriäl für die Anwendung der allgemeinen Sätze beigebracht. Es handelt sich hier um die Konstruktion regelmäßiger Polygonnetze und Gruppenbilder, also um einen Beitrag zur Polyedertheorie. Hauptsächlich werden Polygonnetze $(b_1, b_2, b_3) = (a_0, 2, a_2)$ betrachtet. Das sind Normalunterteilungen regelmäßiger Zellsysteme $\{a_0, a_2\}$, die ihrerseits eine von drei möglichen Verallgemeinerungen der regulären Körper auf beliebiges Geschlecht darstellen (§ 10). Ein regelmäßiges Zellsystem $\{4p, 4p\}$ ist das Poincarésche Fundamentalpolygon oder die erste Normalform der Fläche vom Geschlechte p (§ 11). Es entsteht die Aufgabe, weitere Normalformen beliebiger geschlossener orientierbarer oder nichtorientierbarer Flächen zu finden, d. h. Polyeder bestimmter Art, deren eines sich für jedes Geschlecht angeben läßt. Diese Aufgabe wird in gewissem eingeschränkten Sinne vollständig gelöst (§ 12—15). — Die Hauptergebnisse sind ausführlich und ohne Voraussetzung von Vorkenntnissen dargestellt und an Beispielen erläutert; über weniger wichtige Einzelheiten wird nur referiert.

G. Wiarda (Dresden).

Tucker, A. W.: On combinatorial topology. (*Dep. of Math., Univ., Princeton.*) Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 18, 86—89 (1932).

This note is a condensed account of a paper in preparation. It uses an abstract type of cell introduced by Mayer. It gives some results on a new type of complex-transformation (p -weld) including many old types, on multiplication, joining and intersection. It brings the manifold conditions and the definition of elementary subdivision in a new form.

van Kampen (Baltimore).

Heawood, P. J.: On extended congruences connected with the four-colour map theorem. Proc. London Math. Soc., II. s. 33, 253—286 (1932).

Das Vierfarbenproblem ist dem folgenden äquivalent: Es sollen die Ecken der zu färbenden Bereiche derart mit ± 1 bezeichnet werden, daß für jedes Polygon die Summe der seiner Ecken entsprechenden Werte $\equiv 0 \pmod{3}$ ist. Das Vierfarbenproblem wird damit auf die Lösung gewisser Kongruenzen, auf deren rechten Seiten lauter Nullen stehen, reduziert. In der vorliegenden Arbeit wird die Lösbarkeit der gleichen Kongruenzen, wo jedoch die rechten Seiten nach Belieben gleich 0, 1, 2 gesetzt werden, untersucht. Jeder solchen Wahl entspricht ein dem Vierfarbenproblem analoges Problem. Ihre Anzahl, mit derjenigen der Polygone schnell zunehmend, wächst jedoch langsamer gegen unendlich als die Gesamtanzahl ihrer Lösungen, woraus zu erwarten ist, daß unter den Problemen nur eine kleine Minderheit keine Lösung zulassen werden. Die einfachsten, nicht trivial reduzierbaren Konfigurationen (Dodekaeder usw.) werden diskutiert; im speziellen wird gezeigt, daß nicht alle diese Probleme lösbar sind. Diese Anzahl wird dann vom Standpunkt der Wahrscheinlichkeitsrechnung betrachtet; sie stimmt in ihrer Größenordnung überein mit der zu erwartenden Anzahl von unlösbaren Problemen, wenn eine große Anzahl von Lösungen wahllos gewissen Problemen zugeschrieben werden.

F. Bohnenblust (Princeton).

Mechanik.

Wolkowitsch, D.: Applications de l'ellipsoïde d'inertie. C. R. Acad. Sci., Paris 194, 534—536 (1932).

Die Arbeit zeigt, daß jeder starre Körper in der Dynamik durch ein Ellipsoid oder durch ein Tetraeder dargestellt werden kann, das die gleiche Masse hat wie der gegebene Körper. Dynamisch bringt die Arbeit nichts Neues. Dagegen stellt sie einige interessante Beziehungen der analytischen Geometrie zwischen Tetraeder und Ellipsoid auf.

Schuler (Göttingen).

Panetti, Modesto: Calcolo dei parametri del diagramma delle coppie resistenti di un'elica e relazione fra le sue velocità progressiva e di rotazione per coppia motrice costante. (*Labor. di Aeronaut., Scuola di Ingegneria, Torino.*) Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. fis. ecc. **66**, 417—423 (1931).

A mezzo del metodo degli incrementi medii, l'A. calcola le coordinate dei punti di ordinata massima e quello di ordinata nulla del diagramma dei coefficienti di momento di un'elica; segue la costruzione di un abaco per dedurre l'una dall'altra le velocità progressiva e di rotazione del propulsore. *Bossolasco (Turin).*

Lugaro, Clara: Sul moto maggiormente impedito e su un teorema del Gibbs. Boll. Un. mat. ital. **11**, 28—30 (1932).

In una classica memoria del 1879, W. Gibbs ha ridotto la ricerca del moto di un sistema dinamico vincolato a quella dell'accelerazione reale che rende massima la funzione $\sum (F \times P' - \frac{1}{2} m P'^2)$ tra tutte le accelerazioni compatibili coi vincoli. — Supposti i vincoli indipendenti dal tempo, supposto che le forze non varino, ma varino invece la velocità e l'accelerazione dei vari punti del sistema, (accelerazione perduta o guadagnata, seconde la denominazione dell'A.), si fa la semplice osservazione che il teorema di Gibbs equivale a questo: che il moto del sistema avviene, per la introduzione di nuovi vincoli, in modo che l'energia di accelerazione ($\sum m P'^2$) corrispondente alle accelerazioni perdute o guadagnate, è la minima possibile compatibilmente coi vincoli primitivi e addizionali del sistema. *R. Marcolongo (Napoli).*

Shook, C. A.: An extension of Lagrange's equations. Bull. Amer. Math. Soc. **38**, 135—144 (1932).

Gegeben ein dynamisches System von n Freiheitsgraden, dessen freie Koordinaten q den Lagrangeschen Bewegungsgleichungen zweiter Art genügen. Ersetzt man die n Variablen q durch $n + 1$ Variable r , so gelten für die neuen Variablen $n + 1$ Lagrangesche Bewegungsgleichungen, vorausgesetzt, daß die Ableitung des kinetischen Potentials nach der überschüssigen Geschwindigkeitskomponente verschwindet. Geometrische Interpretation für den Fall $n = 2$. Verallgemeinerung der notwendigen Bedingungen für den Fall, daß in einem System von n Freiheitsgraden die freien Variablen durch $n + p$ neue Variable ersetzt werden. Anwendung auf ein Problem der Planetentheorie: An Stelle der räumlichen Polarkoordinaten r, β, λ eines Planeten werden die vier Variablen Radiusvektor r , wahre Planetenlänge v , Knotenlänge θ und Bahnneigung Φ eingeführt. Überschüssige Variable ist die Bahnneigung, deren zeitliche Ableitung in die kinetische Energie nicht eingeht. *A. Klose (Berlin).*

Schuntner, Erwin: Über die Äquivalenz und Klassifikation der dynamischen Probleme. Ann. Mat. pura ed appl., IV. s. **10**, 83—84 (1932).

Die früheren Betrachtungen des Verf. (Ann. Mat. pura ed appl., IV. s. **9**, 307 bis 321 [1931]; vgl. dies. Zbl. **2**, 414—415) werden in diesem Nachtrag durch Bemerkungen ergänzt, die hervorheben, daß das dynamische Äquivalenzproblem unmittelbar auf die Betrachtung der Substitutionsgruppen der jeweiligen Jacobischen Klammerausdrücke der zeitfreien Integrale reduziert werden könnte. *Wintner.*

Mendes, M.: Sur le problème des n corps à masses variables. C. R. Acad. Sci. Paris **194**, 597—599 (1932).

Die Note deutet über das zu zeitabhängigen Massen $m_i = m_i(t)$ gehörige n -Körperproblem die folgenden Resultate an: I. Sind alle Funktionen $m_i(t)$ für alle reellen t regulär und beschränkt, so gelten gewisse zu den Weierstrass-Sundmanschen analoge Sätze. II. Ist jedes m_i umgekehrt proportional zu t , so kann man durch eine Variablenvertauschung zu einem n -Körperproblem mit zeitunabhängigen Massen übergehen. III. Ist $m_i(t) = \dot{M}_i + o(t^{-2/3})$, so kann mit Hilfe sukzessiver Approximationen gezeigt werden, daß das Problem unter Umständen durch das zu den zeitunabhängigen Massen M_i gehörige n -Körperproblem asymptotisch ($t \rightarrow +\infty$) beherrscht werden kann. Der Beweis wird dabei nur skizziert. Auch ist es schwer einzusehen, daß bei I. die Angaben des Verf. bestehen können, wenn die Funktionen $m_i(t)$ nur entlang

der reellen t -Achse und nicht auch in einem diese in seinem Innern enthaltenen komplexen t -Streifen von fester Breite regulär und beschränkt sind oder wenn sie für reelles t nicht oberhalb einer von Null verschiedenen Schranke bleiben. *Wintner.*

Buchanan, Daniel: Semi-circular orbits in the restricted problem of four bodies with repulsive and attractive forces. Trans. Roy. Soc. Canada III., Math. Sci., III. s. 25, 27—37 (1931)

Das zugrunde gelegte Modell besteht einerseits aus zwei gleichen positiven Massen K_1, K_2 („Kerne“), die in die Punkte $z = +1$ und $z = -1$ der Koordinatenachse $x = y = 0$ placiert sind und irgendwie gezwungen werden, trotz ihrer Anziehung ständig in diesen Punkten zu bleiben, und andererseits aus zwei gleichen negativen Massen E_1, E_2 („Elektronen“), die ihrer gegenseitigen Anziehung sowie der von K_1 und K_2 herrührenden Abstoßungskraft ausgesetzt werden, ohne auf K_1 und K_2 einzuwirken (die Kräfte werden umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung gewählt). Offenbar wird es dann bei jeder hinreichend kleinen Wahl des Ladungsprozensatzes $-E_1/K_1$ durch jede in der Ebene $z = 0$ liegende und den Ursprung des Koordinatensystems enthaltende Gerade, die aus Gründen der Zylindersymmetrie ohne Einschränkung der Allgemeinheit als die x -Achse angenommen werden kann, zwei in bezug auf den Ursprung symmetrisch liegende Punkte geben derart, daß die Elektronen dauernd in Ruhe bleiben, wenn sie ohne Geschwindigkeit in diese beiden Punkte placiert werden. Der Verf. behandelt nun nach der Poincaréschen Anschmiegungsmethode periodische Librationen der beiden Elektronen um diese Gleichgewichtslagen und zeigt die Möglichkeit verschiedener periodischer Schwingungen, bei welchen beide Elektronen sich in der Ebene $z = 0$ derart bewegen, daß ihre Verbindungslinie ständig durch den Koordinatenursprung hindurchgeht und durch diesen halbiert wird. Eventuell mögliche periodische Schwingungen, die nicht in der Äquatorebene erfolgen oder die die erwähnte Symmetrieeigenschaft nicht besitzen, werden nicht in Betracht gezogen, so daß es sich von vornherein um ein Problem mit zwei Freiheitsgraden handelt.

Wintner (Baltimore).

Buchanan, Daniel: Crossed orbits in the restricted problem of three bodies with repulsive and attractive forces. Rend. Circ. mat. Palermo 55, 422—442 (1931).

Das zugrunde gelegte Modell besteht aus zwei gleichen „Elektronen“ $E_1, E_2 < 0$ und aus einem „Kern“ $K > 0$, der die beiden einander abstoßenden Elektronen anzieht, auf den aber die Elektronen nicht einwirken (sonst sind die Kräfte Zentralkräfte und umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung). Wählt man K als Ursprung eines ruhenden kartesischen Koordinatensystems, so wird es im Raum bei passender Wahl des Ladungsprozensatzes $E_1/K = E_2/K$ offenbar Punktpaare geben derart, daß die Verbindungslinie der beiden Punkte des Punktpaares durch den Ursprung hindurchgeht und durch diesen halbiert wird und daß E_1 und E_2 dauernd in Ruhe bleiben, wenn sie ohne Geschwindigkeit in das Punktpaar placiert werden. Der Verf. behandelt nach der Poincaréschen Anschmiegungsmethode die Existenz von kleinen (aber nicht linearisierten) periodischen Librationen von E_1 und E_2 um diese Gleichgewichtslösungen und teilt auch einige numerische Beispiele mit. Dabei wird nicht angenommen, daß diese periodischen Schwingungen in Ebenen erfolgen, es handelt sich vielmehr um Lösungen, bei welchen die Koordinaten $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ von E_1 und E_2 dauernd einer der beiden Symmetriebedingungen

$$x_1(t) + x_2(t) = 0, \quad y_1(t) + y_2(t) = 0, \quad z_1(t) \pm z_2(t) = 0$$

genügen. Eventuelle periodische Librationen, die keine solche Symmetrie besitzen, werden nicht in Betracht gezogen, so daß es sich von vornherein um ein Problem mit nur drei Freiheitsgraden handelt.

Wintner (Baltimore).

Strömgren, Elis: Die direkten periodischen Bahnen um beide Massen im problème restreint (Klasse k). Math.-fys. Medd. danske Vidensk. Selsk. 11, Nr 7, 1—119 (1931).

Die Arbeit bringt diejenige Klasse von in bezug auf beide kartesischen Koordinatenachsen symmetrischen periodischen Lösungen des Kopenhagener Problems, die in

der Helsingforscher Klasseneinteilung group k heißt, bis zum dynamisch bedingten natürlichen Abschluß, worüber bisher nur das Endresultat veröffentlicht war [vgl. z. B. *Erg. exakt. Naturwiss.* **4** (1925)]. Entdeckt wurde die Klasse 1916 (Publ. Købnh. Obs. Nr 24) anlässlich einer Durchmusterung gewisser damals bekannter periodischer Ejektionsbahnen. Die so gefundene Ejektionsbahn von group k , die auf der zur Syzygienachse senkrechten Symmetrielinie der beiden gleichen Massen ganz kleine Schleifen besitzt, erwies sich als fortsetzbar (ibid. Nr 26) und ist dann auch weiter verfolgt worden (ibid. Nr 32). Der natürliche Klassenabschluß konnte aber erst später, durch Heranziehung von asymptotischen Bahnen, erkannt werden (ibid. Nr 47). Jetzt liegt nun sowohl in kartesischen wie auch in Thieleschen Koordinaten das ganze Kopenhagener Material über die Klasse k vor. Es zeigt sich, daß die 1916 entdeckte Ejektionsbahn in ein Kontinuum von periodischen Lösungen eingebettet liegt und daher die Klasse k in zwei Unterklassen k_1, k_2 teilt bzw. diese miteinander verbindet; setzt man, ausgehend von der Ejektionsbahn, beide Hälften k_1, k_2 der Klasse unbegrenzt fort, so besteht der dynamische Abschluß beidemale darin, daß die Periode unendlich wird. Es handelt sich um eine der auch prinzipiell interessantesten Kopenhagener Bahnklassen, da sie überhaupt kein „astronomisch selbstverständliches Anfangsstück“ besitzt, sondern — ausgehend von dem natürlichen Abschluß von k_1 — durch k_1 , durch die Stoßbahn (1916) und durch k_2 hindurch bis zu dem natürlichen Abschluß von k_2 verläuft, also nicht nur in ihrem Verhalten im großen, sondern bereits in ihrer Entstehung sich der Poincaréschen Störungsproblematik vollkommen entzieht. Vgl. auch dies. Zbl. **2**, 210 u. **3**, 133. Wintner (Baltimore).

Garten, Viktor, und Karl Maruhn: Untersuchungen über die Gestalt der Himmelskörper. Eine aus zwei getrennten Ringkörpern bestehende Gleichgewichtsfigur rotierender Flüssigkeit. *Math. Z.* **35**, 154—160 (1932).

Die Verff. beweisen unter Zugrundelegung der von Lichtenstein bei zwei einfach zusammenhängenden Flüssigkeitsmassen („Doppelsternen“) sowie bei der Kelvin-Poincaréschen Ringfigur verwendeten strengen Methoden [*Math. Z.* **12**, 201 ff. (1922); **13**, 82 ff. (1922)] die Existenz der ebenfalls bereits von Poincaré postulierten Gleichgewichtsfiguren, die aus mehreren, voneinander getrennten, gravitierenden dreidimensionalen flüssigen Ringmassen bestehen, die alle Rotationsfiguren sind (ein Zentralkörper — „Saturn“ — wird, ebenso wie bei der Kelvin-Poincaréschen Figur eines einzigen Ringes, nicht angenommen, könnte aber analog behandelt werden). Die Einzelheiten des Existenzbeweises werden für den Fall zweier Ringe durchgeführt, wobei es mindestens zwei verschiedene Typen von Gleichgewichtsfiguren gibt, je nachdem die Ringe voneinander sehr weit liegen oder ihre Entfernung relativ ganz klein ist, in welchem Falle sie dann sehr dünn sein müssen. Ob diese verschiedenen Scharen von Gleichgewichtsfiguren analytische Fortsetzungen voneinander sind, ist eine offene Frage, da man bei dem heutigen Stande der Dinge gezwungen ist, sich auf das „Problem im Kleinen“ zu beschränken. Wintner (Baltimore).

Dive, Pierre: Sur l'existence d'un régime permanent de rotations dans un astre fluide en anneau. *C. R. Acad. Sci. Paris* **194**, 58—61 (1932).

Die Note enthält eine formale Betrachtung über gewissermaßen „stabile“ Bewegungsmöglichkeiten ebener Flüssigkeitsringe. Auf Existenz- bzw. Konvergenzfragen u. dgl. mehr wird nicht eingegangen. Wintner (Baltimore).

Haag, J.: Sur le pendule de gravité. *C. R. Acad. Sci. Paris* **193**, 1391—1393 (1931).

Der Verf. berechnet ein Pendel, bei dem das Moment einer Feder entgegengesetzt dem Moment der Schwerkraft gerichtet ist. Er stellt Formeln für die Empfindlichkeit eines solchen Pendels gegenüber Änderungen der Erdschwere auf. Alle Horizontal-Seismometer beruhen auf solchen Pendelanordnungen, und hierfür ist diese Abhängigkeit bereits bekannt. Schuler (Göttingen).

Le Rolland, Paul: Sur la possibilité de réaliser un dispositif pour la mesure du temps, insensible aux accélérations de son support. C. R. Acad. Sci., Paris **194**, 47—49 (1932).

In dieser Arbeit wird ein Doppelpendelapparat beschrieben, der unabhängig ist von horizontalen Beschleunigungen des Aufstellungsortes. Die beiden Pendel haben dieselbe Schwingungszeit und schwingen in derselben Ebene. Die Differenz ihrer Ausschläge wird beobachtet. Der Verf. beweist, daß diese Differenz von allen horizontalen Beschleunigungen, die auf beide Pendel gleichmäßig wirken, völlig unabhängig ist. Deshalb erhält man die gleichen Zeitintervalle zwischen zwei Koinzidenzpunkten der beiden Pendel. Es folgt die Beschreibung einer experimentellen Anordnung, an der die Richtigkeit der obigen Überlegungen vorgeführt wird. Die Bedeutung eines solchen Doppelpendelapparates besteht darin, daß man mit diesem auf einem Schiffe und einem Luftschiffe Schweremessungen machen kann. Es wird allerdings verlangt, daß die vertikalen Beschleunigungen möglichst klein bleiben, da diese die Messungen stören. Ich möchte darauf hinweisen, daß Vening Meinesz (Delft), der diese ganze Theorie bereits 1929 veröffentlicht hat, in der Arbeit nicht genannt ist. *Schuler.*

Haag, J.: Sur la détermination expérimentale du couple d'amortissement d'un oscillateur. C. R. Acad. Sci., Paris **194**, 838—840 (1932).

Der Verf. weist darauf hin, daß bisher die gedämpften Schwingungen eines Systems nur für die einfachsten Fälle berechnet worden sind, daß die Reibung konstant, proportional der Geschwindigkeit oder proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit ist. Da dies in vielen praktischen Fällen nicht genügt, setzt der Verf. die Reibung als Potenzreihe an:

$$f(\theta, \theta') = \Sigma \Sigma A_{pq} \theta^p \theta'^q.$$

Dabei ist θ der Schwingungswinkel und θ' die Schwingungsgeschwindigkeit. Die Konstanten A_{pq} der Reihe kann man aus aufgenommenen Ausschwingkurven mit verschiedenen Frequenzen bestimmen. *Schuler* (Göttingen).

Meyer zur Capellen, W.: Das Konchoidenpendel. Z. Instrumentenkde **52**, 123 bis 128 (1932).

Der Verf. berechnet die Schwingungen einer massebelegten Scheibe, die durch einen Konchoidenlenker (also eben!) im Schwerfeld geführt ist. Die Differentialgleichung der Bewegung läßt sich aus dem Energiesatz ohne weiteres ableiten. Man erkennt, daß zwei Gleichgewichtslagen bestehen, eine stabile und eine labile, ganz ähnlich wie bei dem Kreispindel. Für kleine Winkelausschläge von der Gleichgewichtslage läßt sich die Differentialgleichung näherungsweise integrieren und die Schwingungszeit berechnen. Bei großen Amplituden muß man zu graphischen Integrationsmethoden greifen. Es ist auch hierfür ein Beispiel in der Arbeit durchgeführt. *Schuler* (Göttingen).

Manarini, M.: Sopra un teorema di Staude-Wan der Woude relativo al moto di un corpo pesante intorno ad un punto fisso. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **14**, 572—577 (1931).

Nel 1894 O. Staude dimostrò che nel moto di un corpo rigido pesante intorno ad un punto fisso O (giroscopio) esiste un cono quadratico di vertice O e le cui generatrici, poste in posizione, verticale, sono assi permanenti di rotazione; teorema che il Wan der Woude completò brillantemente osservando che tali assi permanenti sono assi principali d'inerzia per un loro punto. — Valendosi dei metodi vettoriali-omografici, che nel caso del giroscopio si sintetizzano nello studio della omografia d'inerzia, il Manarini dà una semplice ed elegante dimostrazione dei teoremi ricordati, assegnando in oltre la formula per la durata d'una intera rotazione del tutto analoga a quella del pendolo e numerose proprietà della geometria delle masse. Risolve ancora il problema di assegnare la coppia da imprimere al corpo perché, impressa ad uno degli assi permanenti di Staude una rotazione diversa da quella che gli compete, seguiti a rimanere asse permanente. *R. Marcolongo* (Napoli).

● **Timoshenko, S.: Schwingungsprobleme der Technik.** Ins Deutsche übertragen v. I. Malkin u. Elise Helly. Berlin: Julius Springer 1932. VIII, 376 S. u. 183 Abb. geb. RM. 26.—.

Das so erfolgreiche Werk „Vibration problems in engineering“ liegt nunmehr auch in deutscher Bearbeitung vor. Gegenüber der englischen Ausgabe von 1928 sind mehrere Erweiterungen zu verzeichnen, die sich auf die folgenden Gegenstände beziehen: Erzwungene Schwingungen eines Systems von einem Freiheitsgrad bei Dämpfung durch Coulombsche Reibung (im Anschluß an die Arbeiten von J. P. den Hartog), Auswuchtmaschine von Soderberg und Trumpler, Auswuchtverfahren von Anoshenko und Rathbone, Schwingungsdämpfer mit konstanter Reibung und erzwungene Biegungsschwingungen von Stäben mit nicht einfach unterstützten Enden. Ferner wurden die Literaturhinweise auf den neuesten Stand gebracht und zu verschiedenen Abschnitten vollständig durchgerechnete Beispiele hinzugefügt. *Prager* (Göttingen).

Englisch, Rudolf: Bemerkungen zum Duffingschen Schwingungsproblem. (*Ges. f. angew. Math. u. Mech., Bad Elster, Sitzg. v. 13.—18. IX. 1931.*) *Z. angew. Math. u. Mech.* **11**, 429—430 (1931).

Eine aus der Theorie der Integrodifferentialgleichungen wohlbekannte Methode wird an Hand des Randwertproblems

$$x = x(t); \quad \ddot{x} + a^2 \sin x = f(t); \quad x(0) = -x(\pi) = 0; \quad \int_0^\pi f(t) \sin t \, dt = 0$$

unter der Annahme illustriert, daß die Konstante a^2 sehr nahe an eins liegt und daß die gegebene Funktion $f(t)$ „hinreichend klein“ ist [vgl. hierzu G. Hamel, *Math. Annalen* **86**, 1 (1922)].

Wintner (Baltimore).

Lowenstern, E. R.: The stabilizing effect of imposed oscillations of high frequency on a dynamical system. *Philosophic. Mag.*, VII. s. **13**, 458—486 (1932).

Verf. untersucht den stabilisierenden Einfluß, den kleine erzwungene Schwingungen auf die Bewegung eines linearen Systems haben können. Die Bewegungsgleichungen werden für den Fall eines Systems endlich vieler Freiheitsgrade, das erzwungenen kleinen Schwingungen unterliegt, nach Lagrange allgemein aufgestellt. Die Stabilität wird nach der Methode der kleinen Schwingungen um eine Gleichgewichtslage untersucht. Die Formeln werden angewandt auf: 1. ein umgekehrtes Raumpendel mit schwingendem Stützpunkt; 2. zwei gelenkig verbundene Stäbe mit schwingendem Stützpunkt des einen; 3. drei Stäbe, weiter wie oben. Ref. möchte auf (nicht erwähnte) Arbeiten W. Thomsons (Lord Kelvin) [*Nature* **1892**, 384; *Proc. Roy. Soc. A*, **50**, 194—200 (1892)] hinweisen, wo das gleiche allgemeine Problem behandelt wird wie in vorliegender Arbeit.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Hohenemser, K.: Bemerkungen über die Schwingungszahlen zusammengesetzter elastischer Systeme. *Ing.-Arch.* **3**, 89—90 (1932).

Es werden zwei Arten des Aufbaus eines schwingungsfähigen elastischen Systems aus Teilsystemen untersucht und Beziehungen zwischen der niedrigsten Eigenfrequenz des zusammengesetzten Systems und den niedrigsten Eigenfrequenzen der Teilsysteme angegeben. Ergibt sich die Massenbelegung des zusammengesetzten Systems durch Addition der Massenbelegungen der Teilsysteme und haben die Teilsysteme die gleichen elastischen Eigenschaften wie das zusammengesetzte, so ist die Summe der Quadrate der reziproken niedrigsten Eigenfrequenzen der Teilsysteme eine obere Schranke für das Quadrat der reziproken niedrigsten Eigenfrequenz des zusammengesetzten Systems. Haben die Teilsysteme die gleiche Massenbelegung wie das zusammengesetzte, aber verschiedene elastische Eigenschaften, so ist die Summe der Quadrate der niedrigsten Eigenfrequenzen der Teilsysteme eine untere Schranke für das Quadrat der niedrigsten Eigenfrequenz des zusammengesetzten Systems.

Prager (Göttingen).

Ghosh, M.: The generalised theory of the pianoforte string. (*Phys. Res. Labor., Presidency Coll., Calcutta.*) Indian Phys.-Math. J. 3, 15—25 (1932).

Kar's theory of intermittent action is applied to the damped vibrations of a semi-infinite string struck by an elastic hammer at a point distant $c\tau$ from the fixed end, where c is the velocity of propagation of a transverse wave along the string. The duration of contact is divided into successive epochs of length 2τ and expressions are obtained for the displacement and the pressure of the hammer in each epoch. If V is the velocity of the hammer before impact, the pressure on the string during the second epoch is found to be

$$Vqm\{e^{-qt} - e^{-q(t-2\tau)}\} + \frac{\rho VE c^2}{pT}\{e^{-pt} + e^{-p(t-2\tau)}[1 + p(t-2\tau)]\}$$

where k is the coefficient of damping, T is the tension of the string ρ its line density, E the elastic constant of the hammer m its mass and

$$2qm = 4\rho c - km, \quad 2pT = Ec + kT.$$

Some consideration is given also to special cases of reflection from both ends of a finite string.

H. Bateman (Pasadena).

Hohenemser, K., and W. Prager: Fundamental equations and definitions concerning the mechanics of isotropic continua. *J. Rheology* 3, 16—22 (1932).

In der Mechanik der Kontinua stehen vier Gleichungen stets zur Verfügung: die Kontinuitätsgleichung und die drei Gleichgewichtsbedingungen. Die Zahl der Unbekannten ist jedoch größer; man muß noch Gleichungen hinzufügen, die einen Zusammenhang zwischen den Komponenten des Spannungstensors und denen des Verzerrungstensors oder deren zeitlichen Ableitungen angeben. Diese Gleichungen kennzeichnen je nach ihrer Gestalt einen „idealen Körper“. — Die Verff. diskutieren systematisch die Möglichkeiten solcher — linearer — Beziehungen, also die möglichen Definitionen idealer Körper. Da sie sich auf die Untersuchung von Deformationen beschränken, bei denen die mittlere Spannung

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

verschwindet, genügt es, Beziehungen zwischen Schubspannungen und Gleitungen und ihren zeitlichen Ableitungen zu betrachten; und zwar handelt es sich um jeweils fünf solcher Gleichungen. — Die allgemeinste lineare Beziehung zwischen den in Betracht kommenden Größen lautet

$$\tau + C_1 \dot{\tau} + C_2 \dot{\gamma} + C_3 \ddot{\gamma} + C_4 = 0.$$

Aus ihr leiten die Verff. acht Sonderfälle ab nach dem Schema

$$\begin{array}{ll} 1) & \tau = \eta \dot{\gamma}, & 5) & \tau = \eta \dot{\gamma} - \frac{\eta}{\beta} \ddot{\tau}, \\ 2) & \tau - \tau_0 = \eta \dot{\gamma}, & 6) & \tau - \tau_0 = \eta \dot{\gamma} - \frac{\eta}{\beta} \ddot{\tau}, \\ 3) & \tau - \alpha \dot{\gamma} = \nu \dot{\gamma}, & 7) & \tau - \alpha \dot{\gamma} = \nu \dot{\gamma} - \frac{\nu}{\beta} \ddot{\tau}, \\ 4) & \tau - \tau_0 - \alpha \dot{\gamma} = \nu \dot{\gamma}, & 8) & \tau - \tau_0 - \alpha \dot{\gamma} = \nu \dot{\gamma} - \frac{\nu}{\beta} \ddot{\tau}. \end{array}$$

Die Gleichungen der rechten Spalte unterscheiden sich von denen der linken jeweils um das die Relaxation darstellende Glied. Die Verff. nennen die durch die ersten beiden Zeilen definierten Körper Flüssigkeiten, die anderen feste Körper, und zwar stellen die mit geraden Nummern versehenen Gleichungen plastische Körper dar. — Plastizität wird definiert als „die Fähigkeit des Körpers, dauernde Verformungen zu erleiden, wenn die Spannung eine feste Grenze τ_0 überschreitet; eine Spannung $\tau < \tau_0$ hat keinen Einfluß auf die Verformung“. — Die Konstanten $\tau_0, \eta, \nu, \beta, \alpha$ sind den sonst üblichen Bezeichnungen für Festigkeit, Viskosität usw. entsprechend gewählt. *K. Klotter.*

Hersey, Mayo D.: Dimensional analysis of plastic flow. (*Res. & Develop. Dep., Vacuum Oil Comp., Paulsboro, N. J.*) *J. Rheology* **3**, 23—29 (1932).

Für die zähe Flüssigkeit mit Fließgrenze werden unter Zugrundelegung des Ansatzes von M. Reiner [*J. Rheology* **1**, 11 (1929)] und eines neuen Ansatzes des Verf. dimensionslose Kennziffern nach Art der Reynoldsschen Zahl angegeben.

Prager (Göttingen).

Tonolo, Angelo: Sistemi isostatici dei corpi elastici negli spazi a curvatura costante. *Rend. Semin. mat. Univ. Padova* **2**, 152—163 (1931).

In this paper the author treats the question of the existence of an isotropic elastic medium imbedded in a three-dimensional space of constant curvature and such that there exists a triple infinity of orthogonal surfaces such that at each point the principal directions of the stress tensor lie along the lines of intersection of the surfaces mentioned. Mass forces are neglected and it is shown that if the constant curvature is positive no elastic media of the type considered exist for which the three principal stresses are constant and different. For spaces of negative curvature, on the other hand, such media exist provided one of the principal stresses is zero, the other two being equal but opposite in sign. Similarly if two of the principal stresses are allowed to be equal (but different from the third) no such media exist in a space of constant positive curvature whilst the existence is proven for spaces of constant negative curvature. If the three principal stresses are to be equal no media exist either for spaces of constant positive or of constant negative curvature. — Since the rôle of stress in an Elastic medium is to maintain equilibrium and since forces at distant points in a curved medium can not be unambiguously compared nor added the reviewer is not convinced of the applicability of the results.

Murnaghan (Baltimore).

Larard, C. E.: Special examples of the elastic ring acted upon by equal and equi-angular radial forces. *Philos. Mag.*, VII. s. **13**, 705—710 (1932).

Vom Verf. wurde im *Philos. Mag.*, VII. s. **12**, 129—143 (1931) (vgl. dies. Zbl. **2**, 215) die allgemeine Berechnung der Spannungen und Verschiebungen in einem dünnen, elastischen Ring, der von N gleichen, symmetrischen, radialen Einzelkräften beansprucht wird, mit bekannten Methoden durchgeführt. Ergänzend werden jetzt numerische Werte für die Koeffizienten der maximalen Biegemomente und Radialverschiebungen für $N = 2, 3, \dots, 16$ angegeben.

Mesmer (Göttingen).

Weinel, E.: Das Torsionsproblem für den exzentrischen Kreisring. *Ing.-Arch.* **3**, 67—75 (1932).

Das Torsionsproblem für das exzentrische Kreisrohr läuft in mathematischer Hinsicht auf die erste Randwertaufgabe der Potentialtheorie für ein exzentrisches Kreisringgebiet hinaus, die unter Einführung dipolarer Koordinaten durch Reihenansatz und Koeffizientenbestimmung gelöst wird. Aus der so erhaltenen Torsionsfunktion lassen sich dann durch Integration über das Definitionsgebiet der Drillungswiderstand sowie durch partielle Differentiationen die Schubspannungskomponenten gewinnen; die zahlenmäßige Diskussion der Ergebnisse wird durch beigefügte Kurvendarstellungen veranschaulicht, und die in einer früheren Arbeit von H. M. Macdonald [*Proc. Cambridge Philos. Soc.* **8**, 62 (1893)] für die maximale Schubspannung angegebenen Ausdrücke werden richtiggestellt.

Harry Schmidt (Köthen).

Holmberg, E. O., and Karl Axelsson: Analysis of stresses in circular plates and rings. With application to cylinders with rigidly attached flat heads and flanges. *Trans. Amer. Soc. Mech. Engr., appl. Mech.* **54**, 13—28 (1932).

Die bekannten Formeln der Plattentheorie und der Theorie zylindrischer Behälter werden benutzt, um drei Beispiele zu rechnen: 1. Kreisringplatte, die in zwei konzentrischen Kreisen schneidenartig belastet ist, 2. Kreiszyinderschale mit ebenem Boden unter innerem Überdruck, 3. Kreiszyylinder mit Flansch (Ringplatte), belastet durch je eine Schneidenlast in der Mittelebene des Zylinders und auf einem dazu parallelen Kreise der Platte. In den Fällen 2 und 3 werden die zwischen Zylinderwand

und Platte wirkenden Kräfte (Querkraft und Moment) in der bei statisch unbestimmten Systemen üblichen Art aus Formänderungsbedingungen bestimmt. *W. Flügge.*

Sanden, K. v., und F. Tölke: Über Stabilitätsprobleme dünner, kreiszylindrischer Schalen. Ing.-Arch. 3, 24—66 (1932).

In einer umfangreichen Einleitung wird die Differentialgleichung der Elastika für zentrischen Druck und für Druck-Biegung integriert und auf den grundsätzlichen Unterschied zwischen dem Stabilitätsproblem und der Aufgabe der Spannungstheorie hingewiesen. Die Ergebnisse werden ausführlich diskutiert und mit der bekannten vereinfachten Knicktheorie verglichen, die die Krümmung der elastischen Linie durch die zweite Ableitung der Durchbiegung ersetzt. Die Knicklast erhält man auch hier richtig, während man über die Formänderung unter Lasten, die nahe an der kritischen liegen, unzutreffende Ergebnisse erhält. — Der Hauptteil der Arbeit beschäftigt sich mit der Berechnung der Knickgrenze zylindrischer Schalen für folgende Belastungen: gleichmäßiger Druck in Achsrichtung, konstanter Druck auf die Mantelfläche, die Vereinigung beider Belastungen, die dadurch entsteht, daß der Außendruck auch auf die Zylinderböden wirkt, Torsion des Zylinders durch an den Rändern wirkende Schubkräfte. Die durch die Konstruktion von Unterseebooten angeregten Rechnungen sind auf der Theorie von Love in aller Strenge aufgebaut. Es werden die Gleichgewichtsbedingungen am verformten Schalenelement aufgestellt und hieraus drei partielle simultane Differentialgleichungen gewonnen, deren Eigenwerte die kritischen Lasten sind. Die Ergebnisse werden mit den für alle diese Aufgaben schon vorhandenen Lösungen früherer Autoren verglichen. Der besondere Wert der Untersuchung liegt weniger in den an den alten Formeln angebrachten Korrekturen, als in der einheitlichen Darstellung des ganzen Gebiets. Dadurch ist es möglich, z. B. beim axial gedrückten Zylinder den Anschluß an die Euler-Formel zu finden, die eine stabartige Ausknickung des hinreichend schlanken Rohres ohne Querschnittsdeformation beschreibt.

Für die Belastung durch Außendruck auf Zylinder und Böden wird auch der Einfluß versteiferender Spante untersucht. Die Differentialgleichung wird im Anschluß an frühere Arbeiten über die Spannungstheorie dieser Konstruktion aufgestellt. Sie hat zum Teil veränderliche Koeffizienten. Ihre Auflösung durch einen trigonometrischen Ansatz führt daher auf eine unendliche Determinante, deren Verschwinden die Knickbedingung liefert. Die Konvergenz wird nicht untersucht. Bemerkenswert ist das Ergebnis, daß durch die Spante bei den im U-Bootbau üblichen Abmessungen die Knicklast um 25 % erhöht wird. — Beim tordierten Zylinder beschränken sich die Verf. auf sehr lange Rohre und verbessern die von E. Schwerin angegebene Formel im Sinne einer Erhöhung der Knicklast um 13 %. Auf den von Schwerin schon behandelten Einfluß aussteifender Böden wird nicht eingegangen. *W. Flügge.*

Müller, Emil: Über Einflußlinien und Einflußdiagramme. Z. angew. Math. u. Mech. 12, 36—43 (1932).

Die von Neményi gegebene Deutung der Differentialkurven der Einflußlinien für eine wandernde Einzellast als Einflußlinien für wandernde höhere Lastsingularitäten erfährt durch vorliegende Arbeit ihre sinngemäße Verallgemeinerung auf eindimensionale ebene Tragwerke beliebiger Form und veränderlicher Steifigkeit (ebene Bogen und Rahmenwerke). — Ferner wird die Frage des Zusammenhanges zwischen der Einflußlinie einer bestimmten Größe für wandernde Einzellasten verschiedener Richtung erörtert und u. a. gezeigt, daß zwischen der Einflußlinie $\eta(x)$ für eine lotrechte Last, $\xi(x)$ für eine wagerechte Last und der Tragwerksachse $y(x)$ der Zusammenhang $d\xi/dx = dy/dx \cdot d\eta/dx$ besteht. Eine graphische Konstruktion der Einflußlinien für beliebig gerichtete Lasten wird hierauf gegründet. Einige kurze Andeutungen über die Verhältnisse bei flächenhaft ausgedehnten Tragwerken (Schalen, Platten) schließen den Aufsatz.

P. Neményi (Berlin).

Girkmann, Karl: Bemessung von Rahmentragwerken unter Zugrundelegung eines ideal plastischen Stahles. S.-B. Akad. Wiss. Wien 140, 679—728 (1931).

Der Verf. beschäftigt sich mit der Bestimmung der Tragfähigkeit von Bauwerken aus Stahl unter Zugrundelegung eines ideal elastisch-plastischen Baustoffverhaltens.

Es wird das folgende, in den Arbeiten von J. Fritzsche [Z. angew. Math. Mech. **11** (1931); vgl. dies. Zbl. **2**, 63] und K. Hohenemser [Ing.-Arch. **2** (1931); vgl. dies. Zbl. **3**, 80] nicht so scharf formulierte Prinzip ausgesprochen: Die Bemessung eines beliebigen, statisch unbestimmten Rahmentragwerkes aus Stahl kann in der Weise erfolgen, daß das Tragwerk durch Einschaltung von Gelenken in ein statisch bestimmtes übergeführt und dieses bestimmte Grundsystem für die gegebene Traglast dimensioniert wird. Die der Rechnung zugrunde gelegten Gelenke brauchen nicht ausgeführt zu werden; die dadurch entstehende Überbemessung einzelner Querschnitte kann keine Verringerung des Tragvermögens des Rahmentragwerkes verursachen. Die Auswahl des statisch bestimmten Grundsystemes hat so zu erfolgen, daß ein möglichst wirtschaftlicher Momentenverlauf zustande kommt.

Prager (Göttingen).

Callandreaux, Édouard: Sur une correspondance étroite des théories de la poussée des terres de Coulomb et de Boussinesq. C. R. Acad. Sci., Paris **194**, 953—955 (1932).

L'A. démontre qu'à chaque massif hétérogène H de Boussinesq correspond et réciproquement un et un seul massif homogène h de même poussée, d'angle de frottement intérieur égal à celui qui règne dans le gros du massif H , de même angle de frottement extérieur, et dont la droite de rupture émanée d'un point de la paroi est parallèle à la partie rectiligne de la ligne de glissement de H relative au même point. On déduit de là que la solution dite «de Coulomb», tout au moins pour le cas envisagé ici, est comprise entre les deux approximations par défaut et par excès, et du reste voisines de la théorie nouvelle qui retient leur moyenne arithmétique comme solution optima.

Bossolasco (Turin).

Mechanik der flüssigen und gasförmigen Körper:

Volterra, V.: Sur les jets liquides. J. Math. pures appl., IX. s. **11**, 1—35 (1932).

Das Problem der Flüssigkeitsstrahlen wurde im Anschluß an Helmholtz meist 2-dimensional, mittels der Methode der konformen Abbildung behandelt. Der Verf. gibt hier die Ansätze für den 3-dimensionalen Fall unter Annahme eines allgemeinen Kräftepotentials, und zwar in 2 Schritten: 1. Die Differentialgleichung der Strömungsverteilung auf der als bekannt angenommenen freien Strahloberfläche selbst. 2. Hieraus Bestimmung der Strömung im Innern des Strahls und zugleich Aufsuchung einer möglichen festen Begrenzung desselben. Für die 1. Aufgabe ist es von Interesse, daß die Stromlinien mit den Trajektorien eines frei beweglichen Massenpunktes auf der nämlichen, als fest gedachten Fläche übereinstimmen und daher z. B. für Rotationsflächen ohne weiteres auffindbar sind. Die 2. Aufgabe wird für den Fall näherungsweise durchgeführt, daß die freie Oberfläche und die feste Grenze nur wenig voneinander abweichen. Die eigentliche umgekehrte Aufgabe, bei gegebener fester Oberfläche den freien Strahl zu bestimmen, die das Ziel der Behandlung sein muß, wird noch nicht in Angriff genommen.

F. Noether (Breslau).

Pérès, Joseph: Contribution à l'étude des jets fluides. J. Math. pures appl., IX. s. **11**, 57—66 (1932).

Die in der vorangehenden Arbeit von Volterra formulierte Aufgabe wird hier auch für eine allgemeine (nicht Rotations-) Fläche im gleichen Sinn näherungsweise durchgeführt.

F. Noether (Breslau).

Levi-Civita, T.: Sur les jets liquides. J. Math. pures appl., IX. s. **11**, 37—56 (1932).

Levi-Civita, T.: Sui getti liquidi. Rend. Semin. mat. fis. Milano **5**, 154—173 (1931).

Die hier vorliegende Behandlung der Flüssigkeitsstrahlen, die auf den Vergleich mit gewissen Experimenten hinzielt, unterscheidet sich von der üblichen potential-theoretischen (vgl. z. B. V. Volterra, obenst. Ref.) etwa in dem Sinne, wie die elementare Festigkeitslehre der Balkenbiegung von der elastischen Theorie. Was der Verf. als „linearen Zustand“ des Flüssigkeitsstrahls bezeichnet, entspricht einer Mittelwertbildung über den (als dünn gedachten) Querschnitt des Strahls, sodaß nur die Aufgabe bleibt, eine evtl. zeitlich veränderliche Kurve als Strahlmittellinie zu bestimmen. Für diese lassen sich unter gewissen naheliegenden Voraussetzungen bez. der Druck-

verteilung im Querschnitt aus den mechanischen Grundgleichungen leicht Beziehungen aufstellen, die mit den Gleichungen für die Bewegung eines vollkommen biegsamen, unausdehnbaren Fadens der Form nach und im stationären Falle genau übereinstimmen; im letzteren Falle führen sie also auf die dem betr. Kraftfeld entsprechende Kettenlinie. Die zum Vergleich herangezogenen Experimente bestätigen dieses Ergebnis für den Anfang des Strahls, während er sich weiterhin verbreitert und seine Teile freie (im Schwerfeld parabolische) Bahnen beschreiben. *F. Noether* (Breslau).

Lampariello, G.: *Sulle equazioni differenziali di Levi-Civita nel problema dei getti liquidi.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 14, 556–560 (1931).

Die Note bezieht sich auf das vorstehend referierte Gleichungssystem von Levi-Civita. Um die Frage nach der Existenz regulärer Lösungen dieses Systems zu erörtern, wird an die bekannten Verhältnisse bei der Wärmeleitungsgleichung und bei der verwandten Gleichung: $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x}$ erinnert. *F. Noether* (Breslau).

Mercier, Pierre Ernest: *Contribution à l'étude des frottements visqueux.* J. Physique Radium, VII. s. 3, 73–82 (1932).

Im Anschluß an eine frühere, im wesentlichen experimentelle Arbeit gleichen Titels (vgl. dies. Zbl. 1, 367) gibt der Verf. hier einige mathematische Ergänzungen zur Flüssigkeitsreibung bei laminaren Strömungen. Unter anderem werden für eine ebene Strömung die Reibungskräfte Δu und Δv auf ein beliebiges krummliniges Koordinatensystem umgerechnet und speziell auf dasjenige, welches die Stromlinien und ihre Orthogonaltrajektorien als Koordinatennetz hat (u und v = Geschwindigkeitskomponenten in rechtwinkligen Koordinaten; Δ = Laplacescher Operator).

H. Schlichting (Göttingen).

Cormagi, Rosario: *Azioni dinamiche esercitate in un moto piano liquido provocato da vortici liberi in un semipiano.* Note Esercit. Mat. 6, 255–259 (1931).

Untersucht wird eine ebene Strömung in der halben Koordinatenebene, hervorgerufen durch zwei Wirbel in den veränderlichen Punkten z_1 und z_2 mit den bezüglichen Zirkulationen C_1 und C_2 , wenn die Wand mit der x -Achse zusammenfällt und die positive y -Achse in die Flüssigkeit zeigt. Durch Spiegelung und Einführung der fiktiven Wirbel in den konjugierten Punkten \bar{z}_1 und \bar{z}_2 mit den bezüglichen Zirkulationen $-C_1$ und $-C_2$ wird das Problem in der Halbebene auf ein äquivalentes in der ganzen Koordinatenebene in bekannter Weise zurückgeführt. Für die Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes ergibt sich

$$w(z) = u - iv = \frac{C_1}{2\pi i} \left(\frac{1}{z - z_1} - \frac{1}{z - \bar{z}_1} \right) + \frac{C_2}{2\pi i} \left(\frac{1}{z - z_2} - \frac{1}{z - \bar{z}_2} \right);$$

für die Verschiebungsgeschwindigkeit der Wirbel folgt:

$$w_1 = u_1 - iv_1 = -\frac{C_1}{2\pi i} \frac{1}{z_1 - \bar{z}_1} + \frac{C_2}{2\pi i} \left(\frac{1}{z_1 - z_2} - \frac{1}{z_1 - \bar{z}_2} \right),$$

$$w_2 = u_2 - iv_2 = -\frac{C_2}{2\pi i} \frac{1}{z_2 - \bar{z}_2} + \frac{C_1}{2\pi i} \left(\frac{1}{z_2 - z_1} - \frac{1}{z_2 - \bar{z}_1} \right).$$

Die Resultante der dynamischen Drucke auf die Wand ist null. Für das resultierende Moment in bezug auf den Ursprung folgt: $M = 2\rho (C_1 v_1 y_1 + C_2 v_2 y_2)$ oder umgeformt:

$$M = \frac{4\rho C_1 C_2}{\pi} \cdot \frac{y_1 y_2 (x_1 - x_2) (y_1 - y_2)}{[(x_1 - x_2)^2 + y_1^2 + y_2^2]^2 - 4 y_1^2 y_2^2}.$$

Auch bei n Wirbeln ist die Resultante der dynamischen Drucke auf die Wand null, während sich für das resultierende Moment in bezug auf den Ursprung die folgenden Ausdrücke ergeben:

$$M = 2\rho \sum_{r=1}^n C_r v_r y_r; \quad M = \frac{2\rho}{\pi} \sum_{r,s=1}^n \frac{C_r C_s (x_r - x_s) (y_r - y_s) y_r y_s}{[(x_r - x_s)^2 + y_r^2 + y_s^2]^2 - 4 y_r^2 y_s^2}, \quad r \neq s$$

F. Knoll (Wien).

Caldonazzo, Bruto: Sui moti liquidi piani con un vortice libero. Rend. Circ. mat. Palermo **55**, 369—394 (1931).

Verf. untersucht zweidimensionale Strömungen mit einem Punktwirbel. Es wird vorausgesetzt, daß die Abbildung des Stromgebietes auf einen Normalbereich bekannt ist. Die Strömung in einem Kanal wird durch die Abbildung auf den Einheitskreis, die Strömung um einen Widerstandskörper wird durch eine Abbildung des Strombereiches auf das Äußere eines Kreises eingehend diskutiert. *Weinstein* (Breslau).

Caldonazzo, Bruto: Onda solitaria provocata da un vortice in un canale. Note Esercit. Mat. **6**, 61—74 (1931).

Eine Flüssigkeit befindet sich in einem nach oben offenen Kanal in gleichförmiger translatorischer Bewegung. Denkt man sich in der Flüssigkeit einen Punktwirbel, so entsteht eine Störung der Bewegung, welche in der Gestalt eines Wellenbergs oder Wellentals fortschreitet. Verf. bezeichnet diese Erscheinung als „Einzelwelle“ (nicht zu Verwechseln mit der Rayleighschen Einzelwelle) und untersucht die Bewegung.

Weinstein (Breslau).

Dean, W. R.: Note on the slow motion of fluid. Philos. Mag., VII. s. **13**, 585—600 (1932).

Der Verf. untersucht die ebene Strömung einer inkompressibeln zähen Flüssigkeit in einem Kanal von der Breite B , dessen eine Wand einen unendlich schmalen Vorsprung von der Tiefe b besitzt. Die Lösung des Problems gelingt unter Verwendung eines von A. E. H. Love [Proc. London Math. Soc. (2) **29**, 189 (1929)] für biharmonische Randwertaufgaben der Elastizitätstheorie entwickelten Integrationsverfahrens unter den Voraussetzungen, daß die Trägheitsglieder in der Strömungsdifferentialgleichung vernachlässigt werden können (langsame Bewegung) und daß das Verhältnis b/B klein ist.

Prager (Göttingen).

Millikan, Clark B.: The boundary layer and skin friction for a figure of revolution. Trans. Amer. Soc. Mech. Engr., appl. Mech. **54**, 29—43 (1932).

Boltze hat 1908 die laminare Grenzschicht an Rotationskörpern durch Lösung der von Prandtl aufgestellten Differentialgleichung berechnet. Verf. setzt dieses Verfahren kurz auseinander und ermittelt dann die von v. Kármán für die Grenzschicht an der ebenen Platte aufgestellte Integralbedingung für den Rotationskörper. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Dicke der Grenzschicht an einem Punkte klein ist gegen den Radius und den Krümmungshalbmesser. Bug und Heck des Luftschiffes werden besonders behandelt. Für das laminare Grenzschichtprofil benutzt der Verf. die übliche Reihenentwicklung, für das turbulente Profil das Siebteigesetz. Einen wesentlichen Teil der Arbeit nimmt die Diskussion des Überganges der Grenzschicht vom laminaren in den turbulenten Zustand ein. Verf. legt seinen Rechnungen schließlich die Hypothese zugrunde, daß der Übergang plötzlich erfolgt und die turbulente Grenzschicht die gleiche Dicke habe, als wenn die Grenzschicht von Anfang an turbulent gewesen wäre. Die Reynoldssche Zahl der Grenzschicht am Übergangspunkt $R_{\delta_e} = \frac{U \delta_e}{\nu}$

hängt ab von der Turbulenz des Luftstroms, in dem sich das Luftschiff befindet. Verf. berechnet den Widerstandskoeffizienten abhängig von der Reynoldsschen Zahl der Hauptströmung $R_v = \frac{U_0 (\text{Vol})^{1/3}}{\nu}$ mit der kritischen Reynoldsschen Zahl R_{δ_e} als Parameter. Die Übereinstimmung mit den Experimenten ist befriedigend. *I. Lotz*.

Rosenblatt, Alfred: On the stability of laminar motion of viscous fluids. Philos. Mag., VII. s. **13**, 714—722 (1932).

Der in mehreren früheren Noten des Verf. besprochene Ansatz (vgl. dies. Zbl. **2**, 421; **3**, 176) zur Berechnung endlicher Störungen der Laminarbewegung wird hier durchgeführt unter Annahme einer linearen Poisseuilleschen Stromverteilung als Grundströmung. Bei Vernachlässigung der quadratischen Glieder lassen die Gleichungen sich nach Orr und Sommerfeld dann bekanntlich durch Besselsche Funktionen

lösen, die daher auch in den sukzessiven Näherungen der strengen Gleichungen auftreten. Ihre asymptotischen Darstellungen gestatten einfache Abschätzungen und daher den Konvergenzbeweis für die resultierende Entwicklung. *F. Noether* (Breslau).

Rosenblatt, Alfred: Sur les mouvements voisins des mouvements radiaux plans des liquides visqueux incompressibles. Bull. int. Acad. Polon. Sci. A Nr 6, 438—459 (1931).

Die Entwicklung endlicher Störungen von laminaren Strömungen viskoser Flüssigkeiten, für die der Verf. in einer Reihe vorangehender Noten (s. vorstehendes Referat) die Konvergenz bewiesen hat, wird hier auf die von G. Hamel entdeckten radialen Strömungen in viskosen Flüssigkeiten angewandt (vgl. dies. Zbl. 2, 78). Die Stromfunktion der Störungsbewegung hat, in Polarkoordinaten r, φ , hier die Form: $\sum \varepsilon^m r^m \lambda w_m(\varphi)$ und wird, wie oben, schrittweise entwickelt. Die $w_m(\varphi)$ ihrerseits werden in Form von Fourier-Entwicklungen gefunden, wodurch es nötig wird, unendliche Determinanten zur Auflösung heranzuziehen. Der Konvergenzbeweis wird vollständig nur für den einfacheren Fall durchgeführt, wenn die Grundströmung ohne seitliche Begrenzungen den Winkelbereich von $\varphi = 0$ bis 2π erfüllt. *F. Noether* (Breslau).

Volterra, Enrico: Sur la propagation des coups de bélier à travers un nœud d'un réseau de conduites. C. R. Acad. Sci., Paris 194, 524—527 (1932).

Es handelt sich um die Ausbreitung des Widderstoßes über ein Netz von Wasserrohrleitungen. Verf. erweitert die für einen Rohrstrang gültigen bekannten Ableitungen auf Rohrnetze mit einem Knotenpunkt. (Im übrigen vgl. dies. Zbl. 2, 422.) *Sommer*.

Betz, A., und H. B. Helmbold: Zur Theorie stark belasteter Schraubenpropeller. (Kaiser Wilhelm-Inst. f. Strömungsforsch., Göttingen.) Ing.-Arch. 3, 1—23 (1932).

Die Verff. geben neue Ansätze zur Theorie des stark belasteten Schraubenpropellers mit unendlich vielen Flügeln. Im ersten Hauptteil wird die Bedingung für den höchsten Wirkungsgrad aufgestellt und die zugehörige Verteilung der Geschwindigkeiten im Schraubenstrahl ermittelt. Der zweite Teil bringt dann die Beziehung zwischen den Vorgängen im Strahl und am Propeller. Die Ermittlung des zu einem bestimmten Fortschritts- und Belastungsgrade gehörenden Kontraktionsverhältnisses ist nur näherungsweise möglich. Das benutzte Iterationsverfahren konvergiert gut. Um den Praktikern zeitraubende Rechnung zu ersparen, sind Kontraktionsverhältnis und Wirkungsgrad abhängig vom Fortschrittsgrad mit dem Belastungsgrad als Parameter in Diagrammen dargestellt. — Voraussetzung für die ganze Untersuchung ist, daß die gefundene günstigste Schubverteilung zugleich das größte Kontraktionsverhältnis für den betreffenden Propeller ergibt. Dies ist nur möglich, wenn man annimmt, daß die Propellerfläche etwas gewölbt ist. Am Schluß der Arbeit wird der Sonderfall des drallfreien Schraubenstrahls erörtert. *I. Lotz* (Göttingen).

Pavlenko, G.: Théorie du roulis sur une houle arbitraire. Bull. Acad. Sci. URSS, VII. s. Nr 9, 1191—1218 (1931) [Russisch].

Kap. I („Störungskräfte bei willkürlicher Wellenbewegung“) enthält die Aufstellung der Ausdrücke für die auf das Schiff wirkenden resultierenden Kräfte und Kraftmomente. Die Wellenbewegung des Wassers wird durch ein zeitabhängiges Geschwindigkeitspotential φ beschrieben. Es wird angenommen, daß die Wellenbewegung sowie das Rollen des Schiffes klein ist, und daß die Druckverteilung im Wasser durch die Anwesenheit des Schiffes nicht wesentlich geändert wird. Für die resultierenden Kräfte und Kraftmomente werden angenäherte Ausdrücke abgeleitet, die additiv in 2 Teile zerfallen, wobei der eine Teil nur von der Lage des Schiffes, der andere Teil auch vom Charakter der Wellenbewegung abhängt. — In Kap. II („Reguläre Wellenbewegung als Spezialfall“) werden die Resultate auf den Fall einer sinusförmigen Wellenbewegung spezialisiert, wobei sowohl der Fall eines endlichen als auch der eines unendlich kleinen Schiffes behandelt wird. — In Kap. III („Bestimmung des Geschwindigkeitspotentials nach der gegebenen Anfangsform der Wasseroberfläche“) wird φ in Form Fourierscher Reihen oder Integrale für tiefes und für

flaches Wasser dargestellt. — In Kap. IV („Bewegung des Schiffes auf Wellen willkürlicher Form“) werden die gewonnenen Werte von φ in die Ausdrücke für die Kräfte eingeführt und die Lösungen der Bewegungsgleichungen angegeben. *V. Fock.*

Klassische Optik.

Dufour, Marcel: L'astigmatisme du pinceau oblique réfracté par le dioptré sphérique. C. R. Acad. Sci., Paris 194, 365—367 (1932).

Der Verf. leitet die Formel für den Astigmatismus ab, den eine einzelne Kugelfläche in einem dingseitig zentrischen Bündel hervorruft, dessen Hauptstrahl nicht die Achse (die Verbindungslinie von Dingpunkt und Kugelmittelpunkt) ist; doch wird die Abweichung als unendlich klein erster Ordnung angenommen.

Die Ableitung der Formeln erfolgt so: Der Halbmesser der Fläche sei R , der Abstand des Dingpunkts vom Flächenscheitel auf der Achse a , der senkrechte Abstand des Einfallspunktes des Hauptstrahls von der Achse h , Einfallswinkel des Hauptstrahls i und i' . Man verbinde den Einfallspunkt mit dem applanatischen Punkt der Achse, die Verbindungslinie bilde mit dem Hauptstrahl den Winkel ω . Die Brennweite $B_s B_t$ wird Null für den Mittelpunkt ($i = 0$), für den Scheitel ($a = 0$) und für den applanatischen Punkt ($\omega = 0$), ändert aber, wenn der Dingpunkt auf der Achse wandert, nur in den beiden letzten das Zeichen. Daraus folgt, daß das niedrigste Glied einer Entwicklung von $B_s B_t$ nach h (i und ω hängen von h ab) die Form $a i^2 \omega f(n, a, R, h)$ haben muß. Rein geometrisch läßt sich zeigen, daß R in f nicht vorkommt, daher kann man f aus dem Sonderfall $R = \infty$ ableiten. Danach erhält Dufour, immer unter Beschränkung auf das niedrigste Glied der Entwicklung:

$$B_s B_t = -\frac{n^2 - 1}{n} a^2 \frac{i^2 \omega}{h}.$$

D. verweist darauf, daß man auf bekannte Tatsachen komme, wenn man für i und ω einsetze:

$$i = h \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{R} \right), \quad \omega = h \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{(n+1)R} \right).$$

Hans Boegehold (Jena).

Dufour, Marcel: La suppression de l'astigmatisme des faisceaux obliques dans les lentilles minces. C. R. Acad. Sci., Paris 194, 604—606 (1932).

Soll für ein dünnes, von einem Achsenpunkt ausgehendes Bündel eine Linse keinen Astigmatismus geben, so müssen die Wirkungen der beiden Flächen einander aufheben. Dies führt, wenn die Dicke der Linse zu vernachlässigen ist, auf $i_1^2 \omega_1 = i_2^2 \omega_2$. Setzt man die Brechkraft der Linse D , $1/a = A_1$, $1/a + D = A_2$, ferner die Kehrwerte der Halbmesser ϱ_1 und ϱ_2 , so kann man die Bedingung auch schreiben:

$$I_1^2 \Omega_1 = I_2^2 \Omega_2; \quad I_1 = A_1 - \varrho_1, \quad I_2 = A_2 - \varrho_2; \quad \Omega_1 = A_1 - \frac{\varrho_1}{n+1}, \quad \Omega_2 = A_2 - \frac{\varrho_2}{n+1}.$$

Es läßt sich leicht zeigen, daß diese Bedingung mit der für Hebung der sphärischen Abweichung für einen Achsenpunkt übereinstimmt, worauf in der Tat die Forderung des Verf. hinauskommt. Dufour verweist nun darauf, daß man ϱ_1 und ϱ_2 als Lösung der drei Gleichungen erhalten kann:

$$(n-1)(\varrho_1 - \varrho_2) = D, \quad I_1^2 = \lambda^2 I_2^2, \quad \lambda^2 \Omega_1 = \Omega_2$$

und setzt auseinander, wie ϱ_1 und ϱ_2 zeichnerisch (nach d'Ocagnes Nomographie) zu bestimmen sind. — In einer Anmerkung kommt D. auf die Aufgabe, die Durchbiegung einer punktuell abbildenden Brille in ihrer Abhängigkeit vom Abstand des Augendrehpunkts zu untersuchen, und beleuchtet den vom Ref. aufgestellten Satz, daß die Tscheringschen Ellipsen ähnlich und ähnlich liegend sind und ein gemeinsames Tangentenpaar haben.

Hans Boegehold (Jena).

Gruner, P.: Anwendung der Optik trüber Medien auf die Beleuchtung der Atmosphäre. I. Die Beleuchtung der idealen Atmosphäre im Sonnenvertikal bei Sonnenuntergang und während der bürgerlichen Dämmerung. Helv. physica. Acta 5, 31—58 (1932).

Verf. befaßte sich schon länger mit dem Problem, indem er zunächst unter genau präzisierten Annahmen über die eindringende Strahlung und die Verteilung der licht-

zerstreuenden Teilchen allgemein die für die Ableitung der Helligkeitsverteilung im Sonnenvertikal gültigen Gesetze aufstellte, um sich dann mit Kleinert dem Spezialfall der reinen, kugelförmig geschichteten Atmosphäre zuzuwenden. Er gibt hier einen Überblick über die Hauptgesichtspunkte und die wichtigsten Ansätze seiner, rechnerisch wesentlich von Kleinert durchgeführten Untersuchungen, um sie, soweit sie sich auf die ideale Atmosphäre beziehen, mit den Ergebnissen Ramanathans und den Dornoschen Beobachtungen zu vergleichen. — Die Himmelselligkeit in einer gewissen Blickrichtung wird erzeugt durch die Gesamtheit des innerhalb eines schmalen, vom Beobachter (B) ausgehenden Strahlenkegels mit dem Öffnungswinkel d in denselben hinein zerstreuten Sonnenlichtes. Die Auslöschung — von eigentlicher Absorption (durch Energieverlust) wird abgesehen — erfolgt auf der Strecke $s + w$ vom Eintritt des Strahls bis zur beobachteten Himmelsstelle (P) und auf der Strecke l von da bis B hin. Bezeichnet ξ die Zenitdistanz von P , φ den Winkel zwischen Blickrichtung und Sonnenstrahl, n die Zahl der Teilchen, κ den Extinktionskoeffizienten (k das Entsprechende für ein einzelnes Teilchen), Γ die Zerstreuungsfunktion, so ergibt sich die Intensität I innerhalb des Sehstrahlkegels zu:

$$I_0 \int_{Lu}^L n \Gamma e^{-\int_0^{s+w+l} \kappa(\xi) d\xi} dl.$$

Für die Beleuchtung der idealen Atmosphäre werden die bekannten, von Lord Rayleigh angegebenen Werte für κ und Γ eingesetzt. Zunächst wurden von Kleinert (Methode I) die Humphreyschen Daten über die vertikale Druck- und Temperaturverteilung benutzt (untere getrübe Zone — „graue Schicht“ — vernachlässigt). Aus den Mittelwerten der für 3 Schichten (zwischen 4 und 12, 12 und 24, 24 und 84 km) gefundenen n wurden die Extinktionskoeffizienten berechnet. Dabei wurden die drei Kugelkalotten durch sich möglichst eng anschmiegende, im Querschnitt trapezförmige Kegelstumpfflächen ersetzt. Später berechnete Kleinert (Methode II) — wie auch Ramanathan, aber doch wieder auf ganz andere Weise — seine Endwerte auf einem Umweg unter Benutzung der Bemporadschen Extinktionstheorie. Auf die eingehende Diskussion kann nur kurz verwiesen werden, ebenso auf die zahlreichen, u. a. die Helligkeitsverteilung im Sonnenvertikal zur Zeit der bürgerlichen Dämmerung in verschiedenen Spektralbezirken angehenden Tabellen, aus denen nicht nur zu ersehen ist, daß die Ergebnisse der 3 Theorien leidlich gut miteinander übereinstimmen, sondern daß sich trotz Vernachlässigung der sekundären Diffusion die Dornoschen Beobachtungen gut anschließen.

Jensen (Hamburg).

Smith, T.: Graphical constructions for a refracted ray. (*Opt. Dep., Nat. Phys. Labor., London.*) Trans. Opt. Soc. 32, 150—158 (1931).

Quantentheorie.

● Sommerfeld, Arnold: Atombau und Spektrallinien. Bd. 1. 5. umgearb. Aufl. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn A.-G. 1931. VIII, 734 S. u. 151 Abb. RM. 29.—.

Die 5. Auflage von Sommerfelds „Atombau und Spektrallinien“ zeigt bereits in ihrer Anlage die großen Wandlungen, die in den seit dem Erscheinen der vorhergehenden Auflage verstrichenen 8 Jahren auf dem Gebiete der Atomphysik eingetreten sind. Zwar ist der 1. Band ausschließlich der Behandlung der „vor-Heisenbergschen“ Quantentheorie gewidmet; der Verf. vertritt den maßgebenden Standpunkt, daß auch heute noch, wo wir weite Gebiete der Atomtheorie mit einer deduktiven Theorie zu beherrschen vermögen, ein volles Verständnis nur bei Kenntnis der älteren, mechanisch-korrespondenzmäßigen Anschauungen gewonnen werden kann. Doch hat die Kenntnis der neuen Quantenmechanik es gestattet, trotz wesentlicher Zusätze die Darstellung der älteren Theorie so viel geschlossener zu gestalten, daß der Umfang des Buches

um 130 Seiten geringer werden konnte. — Die wichtigsten Ergänzungen finden sich in der Theorie der Multiplettspektren. Das Paulische Prinzip in seiner ursprünglichen Fassung ist in den Text verarbeitet, ebenso das Spinelektron in seiner Bedeutung für die spektroskopische Systematik und magnetische Erscheinungen. Darüber hinaus findet sich an theoretischen Darlegungen z. B. eine ungemein elegante Ableitung der Thomas-Korrektur, soweit Ref. bekannt ist, die einzige bequem zugängliche in der Literatur. Die spektroskopische Nomenklatur und Zählung der Quantenzahlen ist in Abweichung von dem sonstigen quasimechanischen Standpunkt des 1. Bandes so gewählt, daß sie ungeändert in die neue Quantenmechanik übernommen werden kann. Neuere experimentelle Untersuchungsmethoden sind an vielen Stellen in ihrer Bedeutung für die Theorie diskutiert (vgl. etwa die Abschnitte über magnetomechanische Effekte, Bestimmung der Elementarladung aus röntgenspektroskopischen Messungen, Hyperfeinstruktur u. v. a.). Vielleicht die einzige Stelle, an der die erwünschte Auffrischung mangelt, findet sich in den Darlegungen über Kernzertrümmerung; hier haben wohl Experimente der letzten Jahre eine Reihe älterer Streitpunkte einer Klärung zugeführt. Das Sommerfeldsche Buch ist unserer Überzeugung nach heute mehr denn je für jeden unentbehrlich, der über die tatsächlichen Grundlagen ebenso wie über die Leistungen der Atomtheorie unterrichtet sein will. *Halpern* (New York).

Frenkel, J.: On a general method of treating uncomplete systems in quantum mechanics. (*Phys.-Techn. Inst., Leningrad.*) *Physic. Rev.*, II. s. **39**, 532 (1932).

Zwei Systeme — die Koordinaten des ersteren seien mit x , die des zweiten mit q bezeichnet, während die Impulse entsprechende Differentialoperatoren sind — sollen in Wechselwirkung treten:

$$H = K(x, \partial/\partial x) + L(q, \partial/\partial q) + U(x, \partial/\partial x, q, \partial/\partial q).$$

Es wird ganz allgemein die Möglichkeit betrachtet, statt der Operatoren $q, \partial/\partial q$ nach den Eigenwerten L' von L geordnete Matrizen einzuführen, wobei die Wellengleichung für die Variablen x die Gestalt einer Matrixwellengleichung (ähnlich der bekannten Diracschen Gleichung) erhält. Dieses hier allgemein studierte Verfahren ist schon in verschiedenen Einzelfällen von früheren Verff. angewandt worden. — Es seien $x_{L'}(q) = x_{L'}$ die Eigenfunktionen zu den Eigenwerten L' von L ; wenn die Lösung der Wellengleichung $(H - H') \psi_{H'} = 0$ in der Form $\psi = \sum_L \Phi_{L'}(x) \cdot x_{L'}(q)$ geschrieben wird, gilt für die $\Phi_{L'}(x)$:

$$K \Phi_{L'} + \sum_{L''} U_{L' L''} \Phi_{L''} = (H' - L') \Phi_{L'}; \quad U_{L' L''} = \int x_{L'}^* U_{x L''} dq.$$

Das hat in der Tat die Form $J \Phi = J' \cdot \Phi$, wobei

$$J_{L' L''} = K \cdot \delta_{L' L''} + U_{L' L''}$$

ist.

P. Jordan (Rostock).

Kennard, E. H.: Wave mechanics of radiation and free particles. (*Dep. of Phys., Cornell Univ., Ithaka.*) *Physic. Rev.*, II. s. **39**, 435—454 (1932).

Die Quantenelektrodynamik wird angewandt zur Untersuchung der Einwirkung eines Lichtfeldes auf ein durch ein Wellenpaket dargestelltes Elektron, vornehmlich zu dem Zweck, zu untersuchen, wie das oszillatorische Mitschwingen eines Elektrons im Felde einer Hertzschen Welle übergeht in die stoßmäßigen Einwirkungen hochfrequentiger Wellen im Compton-Effekt. Der Compton-Effekt erfordert, daß der Compton-Rückstoß die Impulsunschärfe des Elektrons übertrifft, so daß die Dimensionen des Wellenpaketes wesentlich größer sein müssen, als die Wellenlänge der fraglichen Strahlung; das ist für jede Wellenlänge realisierbar. Ein längeres quasiklassisches Mitschwingen dagegen erfordert das Umgekehrte, und die Wellenlänge der Strahlung muß die Comptonsche Wellenlänge \hbar/mc wesentlich übertreffen. Die quasiklassische Bewegung des Elektrons kommt zustande unter dauernden Übergängen zwischen verschiedenen Quantenzuständen des Systems Feld + Partikel; für ihr Studium genügt deshalb nicht (wie bei vielen ausgesprochenen Quanteneffekten) die Darstellung

eines Wellenzuges durch einen einzigen Quantenzustand. Die notwendige vollständige Darstellung ist angegeben und genauer erörtert. *P. Jordan* (Rostock).

Young, Lloyd A.: Local momentum in wave mechanics. II. (*Massachusetts Inst. of Technol., Cambridge [U. S. A.]*.) *Physic. Rev.*, II. s. 39, 455—457 (1932).

Weitere Bemerkungen über die Funktion $P(x)$ („local momentum“) eines eindimensionalen wellenmechanischen Problems (mit der potentiellen Energie $V = V(x)$), definiert durch

$$P^2 + 2m(V - E) = \frac{\hbar^2}{4\pi^2} P^{1/2} \frac{d^2}{dx^2} P^{-1/2}.$$

(Vgl. dies. Zbl. 3, 93.)

P. Jordan (Rostock).

Landé, A.: Zur Quantenmechanik der Gasentartung. *Z. Physik* 74, 780—784 (1932).

Die Arbeit versucht, die Äquivalenz von Koordinatenraummethode und „zweiter Quantelung“, wie sie im Falle der Fermi-Statistik (und andererseits der Bose-Statistik) besteht, auf „allgemeinere Fälle“ auszudehnen, welche in willkürlicher Weise so konstruiert werden, daß in jeder „Zelle“ höchstens eine endliche Anzahl $Z - 1$ von Partikeln sich aufhalten kann. (Also $Z = 2$ im Fermischen Falle.) Der Verf. kommt zu dem Resultat, daß dabei eine ähnliche Äquivalenz nicht wiedergefunden werden kann.

Zu bemerken ist noch, daß der Verf. sich für den Fall $Z = 2$ ausschließlich auf eine erste, noch nicht korrekte, diesbezügliche Untersuchung von Jordan stützt, während eine anschließende Arbeit von Jordan und Wigner, welche die abschließende Klärung brachte, nicht berücksichtigt ist. Infolgedessen ist auch die vom Verf. referierend gegebene Darstellung des Falles $Z = 2$ nicht korrekt.

P. Jordan (Rostock).

Breit, G.: Dirac's equation and the spin-spin interactions of two electrons. (*Dep. of Physics, New York Univ., New York*.) *Physic. Rev.*, II. s. 39, 616—624 (1932).

Die Form $-\frac{e^2}{2} \left(\frac{\alpha^I \alpha^{II}}{r} + \frac{(\alpha^I \tau)(\alpha^{II} \tau)}{r^3} \right)$ der Spin-Wechselenergie zweier Elektronen schien sich früher nicht zu bewähren. Eine geeignete Anordnung der Störungsrechnung ermöglicht jedoch eine Absonderung der physikalisch zuverlässigen Störungsglieder von den unbrauchbaren.

P. Jordan (Rostock).

Proca, Al.: Sur une nouvelle caractéristique de l'électron de Dirac. *C. R. Acad. Sci., Paris* 194, 691—693 (1932).

Der Verf. glaubt durch eine Diskussion der Invarianzeigenschaften der Diracschen α_i zeigen zu können, daß das Verhalten des Spinelektrons durch das folgende klassische Bild richtig wiedergegeben wird: Das Elektron besitzt eine rotierende elektrische Ladung und außerdem einen Pol wahren Magnetismus; dieser Pol wahren Magnetismus oszilliert in seiner Größe und nimmt als Maximalwert den Wert des elektrischen Elementarquantums an.

O. Halpern (New York).

Proca, Al.: Sur l'interprétation de l'opérateur α_4 de Dirac. *Bull. Math. Phys. École polytechn. Bukarest* 2, 185—189 (1931).

Der Verf. beschäftigt sich kritisch mit den verschiedenen Deutungen, die zur physikalischen Veranschaulichung der Diracschen Matrizen α_i vorgeschlagen sind, und glaubt im besonderen zeigen zu können, daß der Operator α_4 nicht mit der Größe $\frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{c}$ korrespondiert. Durch die Differentialrelation

$$c dt = \alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2 + \alpha_3 dx_3 + \alpha_4 c d\tau$$

wird eine neue Größe τ definiert, die der Verf. einen Operator nennt, deren nähere Eigenschaften aber erst in einer folgenden Note behandelt werden sollen. Dieser neue „Operator“ soll der Eigenzeit des Elektrons in der klassischen Physik entsprechen; zwischen ihm und dem Diracschen α_4 besteht die Beziehung

$$\alpha_4 = -\frac{1}{2} \frac{d\tau}{dt},$$

die nach Ansicht des Verf. eine befriedigendere korrespondenzmäßige Deutung gestattet als die bisher gemachten Vorschläge.

O. Halpern (New York).

Davidson, P. M.: Eigenfunctions for calculating electronic vibrational intensities. *Proc. Roy. Soc. London A* **135**, 459—472 (1932).

Die Wellengleichung für die Kernschwingung zweiatomiger Moleküle hat man nach mehreren Methoden behandelt, die sich durch die Wahl des Ausdrucks für die potentielle Energie der Kerne unterscheiden (anharmonischer Oszillator, Potentialfunktion von Kratzer, Potentialfunktion von Morse). Der Verf. bringt ein neues Verfahren, um die Eigenfunktionen der Kernschwingung zu bestimmen. Die Brauchbarkeit dieser und der nach den anderen Verfahren ermittelten Eigenfunktionen für kleine und große Werte der Schwingungsquantenzahl wird besprochen, da sie in einer späteren Arbeit zur Berechnung der Intensitäten im H_2 -Spektrum benutzt werden sollen.

R. de L. Kronig (Groningen).

Milianczuk, B.: Verwandlungseffekt der Quadrupollinien. (*Inst. f. Theoret. Physik, Techn. Hochschule, Lemberg.*) *Z. Physik* **74**, 825—847 (1932).

Es handelt sich um die Verwandlung eines Dubletts von Quadrupollinien — z. B. der Kombination $^2S_{1/2} - ^2D_{3/2, 5/2}$ der Alkalien — mit wachsendem (äußeren) Magnetfeld. Ähnlich wie bei den Dipolkombinationen treten auch hier beim Übergang vom schwachen zum starken Feld neue Linien auf, die einer Durchbrechung der j -Auswahlregel entspringen: Zu $|\Delta j| = 0, 1, 2$ kommt hier noch $|\Delta j| = 3$. Intensität und Polarisation der Zeeman-Komponenten wird angegeben — die Rechnung arbeitet mit der Dirac-Gleichung, in den Resultaten wird die „Relativität“ vernachlässigt — und mit den Beobachtungen von Segrè und Bakker [*Z. Physik* **66**, 827 (1930); **72**, 724 (1931)] verglichen. Theorie und Experiment stimmen gut überein.

K. Bechert (München).

Magat, Michael: Über die „Wirkungsradien“ gebundener Atome und den Orthoeffekt beim Dipolmoment. (*Phys.-Chem. Inst., Univ. Berlin.*) *Z. phys. Chem. B* **16**, 1—18 (1932).

Wohl hat [*Z. physik. Chem. B*, **14**, 36 (1931)] auf Grund der Anschauungen von London sowie Slater und Kirkwood aus der Zustandsgleichung empirische Werte von Molekeldurchmessern bestimmt. Aus ihnen werden hier mit einfachen geometrischen Vorstellungen die Radien der beteiligten Atome berechnet. Die Ergebnisse werden benutzt zu einer Kritik der Erklärung des „Orthoeffektes“ bei den Dipolmomenten ortho-substituierter Benzole durch sterische Hinderung. Eine andere Erklärung soll ein grobes Modell liefern, das die Molekel als Gebilde aus Ionen idealisiert. (Die so gegebene Auffassung der Valenzrichtkräfte dürfte nach den neuen Untersuchungen von Slater und Pauling wohl höchstens zum Teil der Wirklichkeit entsprechen.)

F. Hund (Leipzig).

Smith, Lloyd P.: The evaluation of the matrix components for helium. (*California Inst. of Technol., Pasadena.*) *Physic. Rev.*, II. s. **38**, 1961—1968 (1931).

Geht man bei der quantenmechanischen Behandlung des Helium-Atoms so vor, daß man als nullte Näherung die Bewegung der Elektronen ohne gegenseitige Wechselwirkung ansetzt und die zwischen den Elektronen wirkenden Kräfte durch störungstheoretische Behandlung zu berücksichtigen sucht, so führt schon die exakte Berechnung der ersten Näherung auf große mathematische Schwierigkeiten. Als Beispiel führt der Verf. die Berechnung der Matrix der Störungsenergie an, die bekanntlich in Form eines im allgemeinen nicht auswertbaren bestimmten Integrals über den Konfigurationsraum beider Elektronen geschrieben werden kann. Dieses Integral wird vom Verf. durch eine längere Reihe von Transformationen auf einen Ausdruck reduziert, der nur noch Differentiationen einer in geschlossener Form gegebenen „erzeugenden Funktion“ enthält.

O. Halpern (New York).

Wheeler, T. S.: On the theory of equations of state. (*Roy. Inst. of Sci., Bombay.*) *Philos. Mag.*, VII. s. **13**, 604—615 (1932).

Unter der Annahme eines allgemeinen Potenzgesetzes für die Kräfte zwischen den Teilchen eines Systems, in welches (als im allgemeinen als fiktiv anzunehmende

Größen) eine Ladung und eine Dielektrizitätskonstante eingeführt wird, werden der aus diesem Ansatz allgemein folgende Ausdruck für die Verdünnungswärme sowie die thermodynamischen Beziehungen abgeleitet, welche zwischen den verschiedenen in dem Ausdruck für die Verdünnungswärme auftretenden Konstanten bestehen müssen. Die erhaltenen Ausdrücke und Beziehungen werden spezialisiert auf die Fälle 1. starke Elektrolyte, 2. Kristallgitter, 3. Gase und für diese im einzelnen diskutiert.

E. Hückel (Stuttgart).

Kirkwood, John G., and Frederick G. Keyes: The equation of state of helium. (*Research Labor. of Phys. Chem., Massachusetts Inst. of Technol., Cambridge.*) *Physic. Rev.*, II. s. **37**, 832—840 (1931).

Aus den quantentheoretisch berechneten Kräften zwischen zwei Heliumatomen wird der zweite Virialkoeffizient B des Heliums bestimmt, welcher definiert ist durch $pV/RT = 1 + B/V + \dots$. Das Ergebnis der Rechnung ist für alle Temperaturen bis herunter zu etwa 30° abs. in vorzüglicher Übereinstimmung mit dem Experiment. Der Joule-Thomson-Effekt wird berechnet, er kehrt bei 54° abs. sein Vorzeichen um. Sodann wird aus dem gemessenen Ausdehnungskoeffizienten zwischen 0 und 100° und dem berechneten Virialkoeffizienten die Temperatur des absoluten Nullpunktes zu $-273,16^\circ$ bestimmt. Zum Schluß werden die Korrekturen angegeben, die am Heliumthermometer zwecks Reduktion auf absolute Temperatur anzubringen sind.

H. Bethe (Roma).

Kirkwood, John G.: Einfluß der Quantisierung auf die Berechnung von Virialkoeffizienten. (*Phys. Inst., Univ. Leipzig.*) *Physik. Z.* **33**, 39—43 (1932).

Um die Zustandsgleichung eines Gases aus den Eigenschaften der Moleküle abzuleiten, verwendet man das Helmholtzsche thermodynamische Potential ψ , welches sich einerseits aus der Zustandssumme σ durch $\psi = -kT \log \sigma$ berechnet, andererseits nach der Beziehung $p = -(\partial \psi / \partial V)_T$ die Abhängigkeit des Druckes vom Volumen und der Temperatur liefert. Es ist das Ziel der Arbeit, die hierfür erforderliche Berechnung der Zustandssumme in einfacher Weise durchzuführen. Vorausgesetzt wird, daß die potentielle Energie nur vom Abstand je zweier Moleküle abhängt und daß die Verdünnung hinreichend groß ist, um eine Vernachlässigung aller derjenigen Konfigurationen zu ermöglichen, die Wechselwirkungen von mehr als 2 Molekülen bedingen; es genügt daher, die quantentheoretischen Energiezustände bimolekularer Systeme in Betracht zu ziehen. Die statistischen Gewichte werden korrespondenzmäßig im Kontinuum dem Phasenvolumenelement, im Diskontinuum h^m (m = Zahl der Freiheitsgrade) gleichgesetzt. Bei der Berechnung der Zustandssumme des aus n Molekülen bestehenden Gases wird diejenige Teilsumme, die alle Energiezustände eines Moleküls j umfaßt, in eine Summe S über das gequantelte und ein Integral I über das kontinuierliche Gebiet des Phasenraumes zerlegt. Die Summe berechnet sich zu

$$S = h^3 \sum_i g_i e^{-\varepsilon_i/kT} \cdot \sum_{l=1}^n e^{-(E_{n-2} + T_{jl}^0)/kT}.$$

Hierin bedeuten die ε_i die Energieniveaus des aus 2 Molekülen bestehenden Systems, g_i ihre a priori Wahrscheinlichkeiten; T_{jk}^0 ist die kinetische Energie des gemeinsamen Schwerpunktes, E_{n-2} die Gesamtenergie des Gases vermindert um die dem betrachteten Molekülpaar jl zugehörigen Glieder. Das Integral I wird als Differenz aus dem Integral über den gesamten Unterraum des Moleküls I_0 und dem Integral über das quantisierte Gebiet I_q zusammengesetzt, die einzeln berechnet werden können; dabei tritt an Stelle der ε_i das Potential ε als Funktion des Molekülabstandes r auf. Um über alle Teilsummen summieren zu können, setzt Verf. σ als Reihe nach fallenden Potenzen des Volumens V an. Abbrechen der Reihe mit dem ersten Glied entspricht der Näherung des idealen Gases, dessen Zustandssumme bekannt ist. In dieser Näherung ist

$$\sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^{n-1} e^{-(E_{n-2} - T_{jl}^0)/kT} = 2^{1/2} (2\pi m k T)^{(n-1)/2} V^{n-1} n^2.$$

Mit dieser Näherungsformel wird die nächste Näherung berechnet. Die Zustandsgleichung erscheint dann in der Virialform $-pV/RT = 1 + B/V + \dots$. Für den Virialkoeffizienten B ergibt sich

$$B = 2\pi N \left\{ \int_0^\infty (1 - e^{-\varepsilon/kT}) r^2 dr + \int_{r_0}^\infty \left(G \left[\left(-\frac{\varepsilon}{kT} \right)^{1/2} \right] e^{-\varepsilon/kT} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(-\frac{\varepsilon}{kT} \right)^{1/2} \right) r^2 dr - \frac{z^3}{4\pi(mkT)^{3/2}} \sum_i g_i e^{-\varepsilon_i/kT} \right\},$$

worin G die Fehlerfunktion bedeutet. Das erste Glied entspricht der klassischen Statistik; die beiden anderen Glieder entsprechen den diskontinuierlichen Zuständen und bewirken eine Vergrößerung des Virialkoeffizienten gegenüber dem klassischen Wert. Sie haben aber nur bei tiefen Temperaturen merklichen Einfluß. Die früher (vgl. vorst. Referat) durchgeführte Berechnung des Virialkoeffizienten von Helium nach der klassischen Formel wird jetzt korrigiert. Es ergibt sich eine wesentlich verbesserte Übereinstimmung mit der Erfahrung. *Eisenschitz* (Berlin).

Sakai, Takuzô: Note on the photoelectric effect. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 14, 7—13 (1932).

Für die Schrödingergleichung eines geladenen Teilchens im Coulombfeld in parabolischen Koordinaten bildet die Gesamtheit sowohl der entsprechenden allgemeinen Lösungen mit willkürlichem Separationsparameter (die z. B. beim Starkeffekt benutzt werden) als auch die der durch Beugung modifizierten ebenen Wellen, die aus der allgemeinen Lösung durch Nullsetzung des einen Parameters (der Separationsparameter wird hierdurch festgelegt) entstehen, je ein System vollständiger und orthogonaler Eigenfunktionen. Die letzteren sind naturgemäß handlicher. Sie wurden zuerst von Gordon [Z. Physik 48, 180 (1928)] angegeben und kürzlich von Sommerfeld [Ann. Physik 11, 257 (1931); vgl. dies. Zbl. 3, 142] bei der Berechnung der fürs Röntgenbremsspektrum maßgebenden retardierten Matrixelemente (kontinuierlich-kontinuierlich) sowohl fürs einfallende als auch fürs (gebremst) auslaufende Elektron verwendet. Fischer [Ann. Physik 8, 821 (1931); vgl. dies. Zbl. 1, 313] berechnete das für den Photoeffekt aus der K -Schale bei kurzwelligem Licht maßgebende retardierte Matrixelement (diskret-kontinuierlich) mittels der obigen allgemeinen parabolischen Lösung für die auslaufende Welle. Verf. benützt fürs auslaufende Photoelektron die Coulombsche ebene Welle und gibt, in engem Anschluß an Sommerfeld bzw. Fischer, für die Ergebnisse des letzteren eine formal etwas vereinfachte Ableitung. *Guth* (Wien).

Distel, Fritz: Über das Gültigkeitsgebiet der Bornschen Theorie der Stoßprozesse. Z. Physik 74, 785—809 (1932).

In der Bornschen Theorie wird das Stoßproblem durch ein Verfahren sukzessiver Approximation gelöst, wobei aber im allgemeinen nur die erste Näherung wirklich berechnet wird. Der Verf. zeigt nun, daß die Reihe der sukzessiven Approximationen einer Entwicklung nach Potenzen von u^2/v^2 gleichkommt, wobei u die (mittlere) Geschwindigkeit der Umlaufbewegung der Elektronen des streuenden Atoms auf ihren Bohrschen Bahnen ist und v die Geschwindigkeit der gestreuten Partikel, während man an sich denken könnte, es handle sich um eine Entwicklung nach steigenden Potenzen der de Broglie-Wellenlänge λ der Partikel, was eine bessere Konvergenz für schwere stoßende Teilchen zur Folge haben würde. Das Resultat wird zuerst qualitativ aus der Schrödinger-Gleichung für die Streuung im reinen Coulomb-Feld, dann quantitativ durch Berechnung der zweiten Bornschen Näherung für die Streuung von α -Teilchen am H-Atom abgeleitet. Weiter wird gezeigt, daß die Polarisation der Elektronenhülle des streuenden Atoms durch das α -Teilchen keinen merklichen Einfluß auf dessen elastische Streuung hat. Endlich werden die Wirkungsquerschnitte für die Anregung der Zustände $n = 3, l = 0, 1, 2$ des Wasserstoffatoms durch Elektronenstoß ausgerechnet

(erste Näherung des Bornschen Verfahrens). Sie unterscheiden sich von den von Elsasser [Z. Physik **45**, 522 (1927)] gefundenen Werten durch Zahlenfaktoren $\frac{3^{10}}{2^{11}} \cdot \frac{1}{2l+1}$ ihre Summe stimmt mit dem vom Ref. [Ann. **5**, 325 (1930)] gegebenen Gesamt-Wirkungsquerschnitt für die Anregung des 3. Wasserstoffzustandes überein. *Bethe* (Roma).

Björck, Sigge: Zum Comptoneffekt vom klassischen Standpunkt. Z. Physik **73**, 541—546 (1931).

Astronomie und Astrophysik.

Banachiewicz, Thadée: Sur la détermination de l'orbite d'après deux lieux héliocentriques. C. R. Acad. Sci., Paris **194**, 772—773 (1932).

Aus der Lage der zwei Positionen eines Himmelskörpers verbindenden Sehne wird die Lage der Apsidenlinie (elliptische Bewegung vorausgesetzt) direkt abgeleitet. Der übliche Umweg über die wahren Anomalien der einzelnen Positionen soll auf diese Weise vermieden werden.

A. Klose (Berlin).

Boneff, N.: Über das sogenannte Punctum Aequantis und den wahrscheinlichen Ursprung der Trojaner. Astron. Nachr. **245**, 19—32 (1932).

An Hand einer Entwicklung der heliozentrischen kartesischen Koordinaten nach Potenzen der Zeit wird nachgewiesen, daß im allgemeinen zwei Punkte auf der großen Achse einer Keplerellipse angegeben werden können, von denen aus gesehen ein gewisser endlicher Ellipsenbogen gleichförmig durchlaufen zu werden scheint (Gleichheitspunkte der Ptolemäischen Astronomie). Für verschwindend kleine Zeitintervalle und bei Beschränkung auf die Apsidendurchgänge rücken diese Gleichheitspunkte in den von der Sonne nicht eingenommenen Ellipsenbrennpunkt. Für die Saturnbahn liegt zufälligerweise einer der Gleichheitspunkte in der Erdbahn. In sehr losem Zusammenhang mit diesen Untersuchungen stehen Betrachtungen über die kosmogonischen Möglichkeiten, die Bahn eines Jupitersatelliten überzuführen in eine Bahn, die einen der Lagrangeschen Dreieckspunkte des Systems Sonne-Jupiter (Trojanerbahn) umschließt.

A. Klose (Berlin).

Eddington, Arthur: On the value of the cosmical constant. Proc. Roy. Soc. London A **133**, 605—615 (1931).

Für ein im Felde eines festen Elektrons bewegliches Elektron gilt die Wellengleichung

$$\left(\alpha \frac{\partial}{c \partial t} + \frac{i}{r}\right) \psi + \left[\alpha^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + (i\gamma)^2\right]^{1/2} \psi = 0,$$

wo $\alpha = hc/2\pi e^2$, $\gamma = 2\pi mc\alpha/h$, h die Plancksche Konstante, c die Lichtgeschwindigkeit, e die Ladung und m die Masse eines Elektrons ist. Spekulative Betrachtungen über die Natur des Massenterms führen den Verf. zu der Identifizierung $\gamma = \sqrt{N}/R$, wo R der Radius der (räumlich sphärischen) Welt in einem stationären Zustand (Einsteinsche Zylinderwelt) und N die Zahl der Elektronen in dieser Welt ist. Andererseits gilt in einer solchen Welt für die kosmologische Konstante $\lambda = 1/R^2$ und $GM_0/c^2 = \frac{1}{2} \pi R$, wo G die Gravitationskonstante und M_0 die Gesamtmasse der Welt ist. Nimmt man an, daß die Welt gleich viel Elektronen und Protonen enthalte, so ist $M_0 = NM$ (M = Protonenmasse). Dann kommt $\lambda = 9,8 \cdot 10^{-55} \text{ cm}^{-2}$ oder $R = 1,01 \cdot 10^{27} \text{ cm}$. Aus dem Ref. unbekannten Gründen wird dann die gegenwärtige Ausdehnungsgeschwindigkeit der Welt zu $c/R\sqrt{3}$ angegeben und erhalten 528 km/sec auf 1 Million parsec, was mit dem Hubbleschen Wert 465 befriedigend übereinstimmt; besonders wenn man — wie der Verf. bemerkt — bedenkt, daß der theoretische Wert wegen der Vernachlässigung der Gravitationswechselwirkungen zu hoch ist. *Heckmann* (Göttingen).

Eddington, Arthur: The expanding universe. Proc. Phys. Soc. London **44**, 1—16 (1932).

Halbpopulärer Vortrag vor der Physical Society mit besonderer Berücksichtigung der eigenen Beiträge des Verf. zum Thema [vgl. dies. Zbl. **1**, 43; vorst. Referat und Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **92**, 3 (1931)].

Heckmann (Göttingen).

Gunn, Ross: On the evolution of a rotationally unstable star. *Physic. Rev.*, II. s. 39, 130—141 (1932).

The author enumerates several difficulties in the present form of the fission theory of binary stars. One of these concerns the source of the angular momentum sufficient to cause instability in the parent star, and he proposes to resolve it by appealing to his previous theory of currents generated in stellar atmospheres by electromagnetic forces. These currents will communicate angular momentum to the star itself. Another difficulty is to explain why the components formed in the fission do not suffer further disruption under each others tidal action. The author argues however that tidal couples will convert axial rotation into orbital rotation, thus causing the components to separate. In addition, just after the fission, the parts of the surfaces of the components nearest each other will be at much higher temperatures than the rest of the surfaces, since they are formed of material from near the centre of the parent star. This introduces an asymmetry into the radiation of each component, and the reaction effect will cause further, and possibly complete, separation of the pair. The radiation will not in general be symmetrically distributed about the line of centres so that the reaction effects will also modify the rotations. Thus the different types of observed orbit may be accounted for. There may be a loss of atmosphere during the disruption; and the author suggests that in some cases the gas liberated may form an envelope round the whole system, this will pulsate under the varying radiation pressure. Thus a theory of Cepheid variation may be found. He relates the work also to the kinetic energies of *B* and *O* type stars, and to the origin of the solar system. *W. H. McCrea.*

Gunn, Ross: On the origin of the solar system. *Physic. Rev.*, II. s. 39, 311—319 (1932).

This is an attempt to use the author's recent theory (vgl. vorst. Referat) of the fission of a rotating star into a binary system to give an account of the origin of the solar system. A parent star is supposed to have divided, and the components separated owing to an asymmetrical loss of momentum by radiation. It is suggested that planetary systems were formed by the tidal actions of the components on each other while they were near together, and that satellite systems were formed while the planets were still near their primaries. The solar system formed in this way would originally have occupied a smaller space than it does now. The author adduces the order of magnitude of the angular momenta and periods of rotation of the planets in support of his views. He considers the formation of a planetary system a more frequent event than is usually supposed. *W. H. McCrea (Edinburgh).*

Milne, E. A.: The theory of stellar structure. *Z. Astrophys.* 4, 75—117 (1932).

In einer längeren programmatischen Einleitung wird eine Wiederholung und Erläuterung der Milneschen Problemstellung für die Theorie des Sternaufbaus gegeben: Welches sind die möglichen Gleichgewichtszustände von kugelsymmetrisch angeordneter Materie der Gesamtmasse *M*, die mit Energiequellen vom Gesamtbetrag *L* versehen ist? Zur Lösung dieser Frage geht Milne von den üblichen Differentialgleichungen aus, die er in Form von drei nicht-linearen Gleichungen erster Ordnung für Dichte $\varrho(r)$, Temperatur *T*(*r*) und eingeschlossener Masse *M*(*r*) schreibt:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr} p(\varrho, T) - \frac{\kappa L(r)}{4\pi c r^2} \varrho &= -\frac{GM(r)}{r^2} \varrho, \\ \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{3} a T^4 \right) &= -\frac{\kappa L(r)}{4\pi c r^2} \varrho, \\ \frac{d}{dr} M(r) &= 4\pi \varrho r^2.\end{aligned}$$

Dabei ist *p* der Gasdruck, κ der Absorptionskoeffizient, und *L*(*r*) läßt sich auf *M*(*r*) zurückführen durch den Ansatz

$$\begin{aligned}L(r) &= L, & (M \geq M(r) \geq M\delta) \\ L(r)/L &= M(r)/M\delta. & (M\delta \geq M(r) \geq 0)\end{aligned}$$

Das wesentlich Neue in der Milneschen Untersuchung liegt in der Wahl der drei Grenzbedingungen, die die drei willkürlichen Konstanten in der allgemeinen Lösung der drei

Differentialgleichungen bestimmen. Sei r_1 der zunächst unbekannte Radius der Konfiguration, so soll sein

$$M(r_1) = M,$$

$$L = 4\pi r_1^2 \frac{ac}{\sqrt{3}} [T(r_1)]^4,$$

$$\varrho(r_1) = \varrho_0.$$

Die zweite dieser Randbedingungen ist aus dem von der Theorie der Sternatmosphären bekannten Schwarzschild-Hopf-Bronsteinschen Theorem $T_e^4 = \frac{4}{3} T_0^4$ hergeleitet, während die dritte

fordert, daß die Konfiguration am Rande mit einer endlichen Dichte ϱ_0 aufhöre, die gleich der Dichte der interstellaren Materie (10^{-26} g cm $^{-3}$) gesetzt wird. — Die Gleichungen werden zunächst gelöst für den Fall einer vollkommen gasförmigen ($p = \frac{\Re}{\mu} \varrho T$) Konfiguration mit

gleichförmiger Quellenverteilung ($\delta = 1$) und dem Absorptionsgesetz $\kappa = \alpha T^m \varrho^n$. Dabei ergibt sich für eine solche Konfiguration bei Werten von L und M , die denen der beobachteten Sterne entsprechen, ein Radius von der Größenordnung 1 Parsec, eine mittlere Dichte von 10^{-25} g cm $^{-3}$ und eine Zentraltemperatur von 1° . — Ferner werden vollkommen gasförmige Konfigurationen betrachtet, bei denen die gesamte Energie gleichförmig innerhalb eines zentralen Kernes der Masse $M\delta$ erzeugt wird, während die Hülle quellenfrei ist. Auch hierbei ergibt die Einführung der Schwarzschild-Hopf-Bronsteinschen Grenzbedingung und der endlichen Randdichte eine enorme Ausdehnung der äußeren Schichten, doch wird nur der Gang der Rechnung angedeutet und keine endgültigen Schlüsse gezogen. — Im letzten Abschnitt wird die Rechnung für zweiphasige Konfigurationen skizziert, vor allem für den Fall, daß bei gleichförmiger Quellenverteilung ein entarteter Kern von einer gasförmigen Hülle umgeben ist. Der Radius einer solchen zusammengesetzten Konfiguration liegt jedenfalls zwischen dem einer völlig entarteten (10^8 cm) und dem einer völlig gasförmigen (10^{18} cm). — In einem Zusatz weist M. darauf hin, daß diese vorläufigen Ergebnisse seiner Ansicht nach zeigen, daß die beobachteten Sterne nicht völlig gasförmig sein können.

Siedentopf (Jena).

Markowitz, William: The evolution of binary stars. (*Yerkes Observ., Univ. of Chicago, Chicago.*) *Astrophys. J.* **75**, 69—105 (1932).

Problemstellung: Läßt sich die Gesamtheit der visuellen und spektroskopischen Doppelsternsysteme kosmogonisch einheitlich auffassen in dem Sinne, daß durch die Wirkung bekannter Kräfte Systeme der einen Art in solche der anderen Art übergeführt werden? Methode: Ableitung statistischer Beziehungen zwischen Periode (P), großer Achse (a), Exzentrizität (e), Masse und mittlerer Dichte aus bestimmten Voraussetzungen über Entstehung und Entwicklung der Systeme; Vergleich mit der Beobachtung unter Berücksichtigung der Verfälschung der statistischen Beobachtungsbefunde durch Auswahlprinzipien. Resultate: Gezeitenreibung, säkulare Massenabnahme und nahe Begegnungen vermögen weder ein durch Teilung entstandenes enges spektroskopisches System in ein weites visuelles von den bekannten Eigenschaften überzuführen, noch visuelle Systeme von sehr großer Periode in solche von wesentlich kürzerer. Der kombinierte Einfluß von Massenverlust durch Ausstrahlung, Massen Gewinn durch Aufsammlen interstellarer Materie und Widerstand des interstellaren Mediums bewirkt selbst im äußersten Fall des stationären Zustandes (Massenverlust gleich Massengewinn), der kaum erreicht wird, Abnahme von P , a und e . — Allgemeine Schlußfolgerung: Wenn keine anderen Kräfte wirken, die P , a und e vergrößern, als Gezeiten, Massenabnahme und nahe Vorübergänge, dann werden P , a und e im allgemeinen abnehmen.

Kienle (Göttingen).

Harper, W. E.: The spectroscopic binary stars. (*Dominion Astrophys. Observ., Victoria [Canada].*) *Scientia* **51**, 257—263 (1932).

Siedentopf, H.: Zum Aufbau der weißen Zwergsterne. II : σ^2 Eridani B. (*Univ.-Sternw., Jena.*) *Astron. Nachr.* **245**, 33—36 (1932).

The author's theory of white dwarfs [*Astron. Nachr.* **243** (1931); this Zbl. **2**, 235] is applied to σ^2 Eridani B. With his previous assumptions he shows it to be formed of a degenerate core with polytropic index $n = 1,5$, surrounded by a gaseous envelope with $n = 3,25$. The mean molecular weight must be about 2,0 and this leads to a central density $\varrho_c = 8,3 \cdot 10^5$. A minimum value of the central temperature is $T_c = 9 \cdot 10^7$,

corresponding to a uniform distribution of energy generation. A formal maximum, corresponding to a "point source" in the case where degeneracy is just reached at the centre, is $T_c = 6,8 \cdot 10^8$. There is some possibility that energy transport by free electrons is of importance in the central regions. *W. H. McCrea* (Edinburgh).

Lotka, A. J.: Contribution to the mathematical theory of capture. I. Conditions for capture. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 18, 172—178 (1932).

Eddington, A. S.: The expansion of the universe. J. Astron. Soc. Canada 26, 26—31 (1932).

Krat, W.: Über das Strahlungsgleichgewicht der Sternatmosphäre. (*Univ.-Sternw., Kasan.*) Astron. Nachr. 245, 5—8 (1932).

Schwarzschild-Milne's solution of the problem under consideration holds for the case in which the medium has a plane boundary and the surfaces of equal temperature are parallel planes. Of course this case is the only important in practice. The author of this note aims to extend this analysis taking into account the curvature of the atmospheric strata. Let $k(s)$ [Milne's — $B(\tau)$] be the solution for the plane parallel problem, $k'(s)$, that for the curvilinear problem (s being the optical depth). Starting from general form of the equation of radiative equilibrium as given by Ambarzumian and Kosirev (Astron. Nachr. 229, 85) and expanding it for large values of r (radius of curvature), he finds $\Delta k(s) = k'(s) - k(s)$. It appears to be

$$\begin{aligned} \Delta k(s) = & -\frac{1}{2}c \left\{ \int_0^\infty Ei(|s-t| \operatorname{cosec} \delta\alpha) U(t) dt \right. \\ & - \frac{1}{d} \int_0^\infty (s-t) [Ei(|s-t| - Ei(|s-t| \operatorname{cosec} \delta\alpha))] U(t) dt \\ & \left. - \frac{1}{2d} \int_0^\infty (s-t) [e^{-|s-t| \operatorname{cosec} \delta\alpha} - e^{-|s-t|}] U(t) dt \right\}, \end{aligned}$$

where $U(t)$ is the solution for plane parallel problem, c the constant of integration, d "the optical radius of curvature" i.e. $r(\overline{\kappa s})$ ($\overline{\kappa s}$ mean value of κs for the layers under consideration) and $\delta\alpha = \arctang \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\Delta z}{2}}$, (Δz = the difference in linear depths). No numerical estimates of the curvature terms is given. *B. P. Gerasimovič.*

Chandrasekhar, S.: Model stellar photospheres. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 92, 186—195 (1932).

The physical structure of a stellar photosphere is studied with the help of an accurate theoretical value of the absorption coefficient derived by the author. The model taken is a one-constituent atmosphere in which the first stage ionisation has set in, and a mean value of this ionisation is used. The equations of mechanical and radiative equilibrium are solved to a suitable degree of approximation. It is shown that the ratio of gas-pressure to radiation-pressure ultimately increases as $T^{3/4}$. Numerical results are given for the optical depth, radiation- and gas-pressure, temperature, density, and absorption coefficient at different depths in two typical model atmospheres. These are chosen to have luminosity, surface gravity, etc., corresponding to the sun, and a plausible value has to be assumed for the effective mean ionisation potential. The values obtained are of the generally accepted order of magnitude. It is shown that the temperature is virtually a linear function of the depth, except near the boundary. For two stellar atmospheres of the same molecular weight and boundary temperature, points of the same optical depth τ correspond to actual depths which are inversely proportional to the surface gravities, provided τ is sufficiently large.

W. H. McCrea (Edinburgh).

Strömberg, Bengt: The opacity of stellar matter and the hydrogen content of the stars. *Z. Astrophys.* 4, 118—152 (1932).

The author examines how far an adequate hydrogen content in the stars would lead to agreement between theoretical and observed opacity coefficients. His method is to use the theoretical opacity and to deduce the hydrogen abundance necessary to give agreement with observation for stars of known mass M , radius R , and luminosity L . Eddington's stellar models are taken, but the results do not appear to be sensitive to the exact model chosen. A full discussion is given of recent theories of the absorption coefficient. It is evaluated for a mixture of gases, other than hydrogen, taken in the relative proportions found by H. N. Russell for the solar atmosphere, this being assumed typical also of stellar interiors. The hydrogen present affects the opacity by supplying additional free electrons. A proportion of about 0,3 by weight will bring the calculated and observed opacities into agreement in Capella, the Sun, and Sirius. It appears that stars on the normal line of the Russell diagram have a constant hydrogen content, while deviations from the normal line indicate a different hydrogen abundance. The author concludes that the „hydrogen hypothesis“ provides a plausible solution of difficulties concerning the magnitude of the opacity coefficient. The paper contains details of methods employed in the numerical computation of the opacity coefficients.

W. H. McCrea (Edinburgh).

Unsöld, A.: Über die Gesamtaborption von H^{α} in den Spektren von B- und A-Sternen. *Z. Astrophys.* 4, 172—174 (1932).

The author has measured the total absorption in H^{α} in eight stars whose types range from B5 to A5. The results are compared with those of Elvey and Keenan who use a tenfold larger dispersion. The maximum number of hydrogen atoms in the 2 quantum state above 1 cm^2 of the photosphere occurs at type A0.

R. Woolley (Cambridge).

Ten Bruggencate, P.: Die Entstehung der Fraunhoferschen Linien in der Sonnenatmosphäre. *Z. Astrophys.* 4, 159—171 (1932).

The author discusses ab initio the equations governing the formation of absorption lines in a solar atmosphere. He concludes that the quantity s_{ν}/k_{ν} can be determined rigorously as a function of the optical depth from a series of observed contours from limb to centre, after the manner of H. Plaskett, and gives a method of successive approximation by which a determination can be carried out in practice.

R. Woolley (Cambridge).

Kristallographie.

Heesch, H.: Reine Diskontinuums-kristallographie. *Z. Kristallogr.* 81, 230—242 (1932).

Es wird der Versuch unternommen und für die einseitige Ebene auch explizite durchgeführt, die Kristallsymmetrien nicht wie bisher üblich eingebettet im kontinuierlichen euklidischen Raume abzuleiten, sondern die Ableitung durchzuführen in einem Raume, der nur aus diskreten, durch drei primitive Translationen erzeugten Punkten besteht. Auf diese Weise wird eine Unterstreichung des diskontinuierlichen Charakters der Kristallographie erreicht. Das Problem ist das folgende: Wie ist es möglich, in einem Translationsgitter mit den Gitterkonstanten a, b, c durch Besetzen bzw. Nichtbesetzen der Gitterpunktlagen mit Teilchenschwerpunkten (derart, daß Translationssymmetrie erhalten bleibt, evtl. unter Vergrößerung der Gitterkonstanten zu Ma, Nb, Pc , wo M, N, P ganze Zahlen sein sollen) spezielle Symmetrien zu erzeugen. Jede Möglichkeit, die Gitterpunkte zu besetzen oder freizulassen wird Besetzung, Konfiguration oder Ausstreuung genannt. Es wird untersucht, in welcher Weise die Anzahl der Ausstreuerungen von M, N, P abhängt. Sodann wird danach gefragt, wie groß mindestens die M, N, P sein müssen, daß es ermöglicht wird, durch spezielle Ausstreuerungen die holoeidrische Symmetrie des Translationsgitters zu zerstören und hemi-

edrische Symmetrien zu erzeugen. Für das lineare Diskontinuum muß M mindestens gleich 6 sein, bei den ebenen Diskontinuen sind Zellen bis zur Größe $6a \cdot 6b$ notwendig. F. Laves (Göttingen).

March, Artur: Mathematische Theorie der Regelung nach der Korngestalt bei affiner Deformation. (*Inst. f. Theoret. Phys., Univ. Innsbruck.*) Z. Kristallogr. 81, 285—297 (1932).

Es wird das Gesetz gefunden, nach welchem stäbchen- oder blättchenförmige Teilchen durch affine Deformation des Mediums, in das sie eingebettet sind, geregelt werden. Um die Frage rechnerisch durchführbar zu gestalten, wird vorausgesetzt, daß bei einer affinen Deformation des Mediums die Achsenrichtungen (bzw. Normalenrichtungen) der in dieses eingebetteten Teilchen dieselbe Verlagerung erfahren, als ob diese Richtungen im homogenen Medium als mechanisch wirkungslose Gerade vorgezeichnet wären. F. Laves (Göttingen).

Sander, Bruno: Zur Kinematik passiver Gefügeregelungen. Z. Kristallogr. 81, 298—308 (1932).

Die theoretischen Ergebnisse einer Arbeit von A. March über eine mathematische Theorie der Regelung nach der Korngestalt bei affiner Deformation werden diskutiert im Hinblick auf die in der Natur vorkommenden Gesteinsgefüge. Werden Gesteine tektonisch beansprucht, so läßt sich die Beanspruchung darstellen durch Angabe eines Ellipsoides, in welches eine Kugel des undeformierten Materials durch die Beanspruchung übergeführt wird. Aus dem Gefüge des deformierten Materials läßt sich auf die während der Deformation herrschenden Kräfte schließen. Für die Einregelung von Mineralkörnern in ausgezeichnete Richtungen bzw. Ebenen werden zwei Faktoren verantwortlich gemacht, 1. Korngestalt (= äußere Form der Körner) und 2. Kornbau (= innere Kohäsionseigenschaften des Materials). Bezüglich einer Regelung nach Korngestalt wird besonders der Fall untersucht, daß das Deformationsellipsoid rotationssymmetrisch ist. In der Natur scheint im wesentlichen Deformation nach gestreckten Ellipsoiden vorzuliegen, sowohl für stäbchenförmige wie plättchenförmige Mineralkörner enthaltende Gesteine. Die Behandlung der Regelung nach dem Kornbau befaßt sich mit der Beantwortung folgender Frage: Was läßt sich über die Endlage von parallelen Gleitschichten sagen, wenn ihre Ausgangslage beliebig ist und das Strain-Ellipsoid einer affinen Deformation nach Gestalt und Lage vorgeschrieben ist? Für die mathematische Behandlung, welche von H. Schatz anhangsweise durchgeführt ist, wurde das Problem folgendermaßen gestellt: Gegeben ist eine aus parallelen Gleitschichten e zusammengesetzte Kugel mit irgendeiner, aber in jedem Einzelfall bestimmten Lage von e gegenüber festen Koordinaten; ferner ein nach Gestalt und Lage (gegenüber diesen Koordinaten) ebenfalls bestimmtes Ellipsoid. Gefragt ist, ob und wie die Kugel durch Gleitung in e und Rotation in das Ellipsoid übergeführt werden kann. Als Umkehrung wird die Aufgabe gelöst, bei einem vorgegebenen dreiachsigen Ellipsoid die Translation aufzusuchen, durch welche das Ellipsoid aus einer Kugel entstanden sein kann. Wichtig ist die Feststellung, daß man durch eine Gleitung nicht aus einer Kugel ein Rotationsellipsoid erzeugen kann. Es ergibt sich, daß von den in einem undeformierten Gestein richtungslos verteilten Mineralkörnern nur ein gewisser, bestimmten Bedingungen genügender Teil durch Translation in gleicher Weise affin deformiert werden kann wie das die Körner einbettende feinkörnigere Gesteinsmaterial. Die anderen Körner zergleiten entweder nicht nach den kristallographisch ausgezeichneten Translationsebenen bzw. -richtungen oder sie werden nicht in gleicher Weise affin deformiert wie das umgebende Mittel oder sie müßten definierbare Rotationen gegen ihre Umgebung ausführen, für deren Zustandekommen allerdings keine Kräfte wahrscheinlich zu machen sind. F. Laves (Göttingen).

Tertsch, H.: Wie erfolgt der Spaltungsvorgang bei Kristallen? Z. Kristallogr. 81, 275—284 (1932).